Aalto-yliopisto

MS-A0301 / Kevät 2015

Välikoe 2, 9.4.2015 klo 9-12

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.
Kaavakokoelma koepaperin kääntöpuolella.

Tehtävä 1: a) Mitä kuvaavat gradientti, divergenssi ja roottori? Anna näistä myös esimerkit funktion f ja vektorikentän $\mathbf{F}$ avulla, kun $f(x,y,z) = x\sin(y) + z^3\cos(y)$ ja $\mathbf{F}(x,y,z) = y\sin(x)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - y^2\ln(z)\mathbf{k}$. (4 p.)

b) Olkoot $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ sileitä konservatiivisia vektorikenttiä $\mathbb{R}^3$:ssa. Osoita, että kenttä $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ on lähteetön. (2 p.)

Tehtävä 2: Olkoon $D \in \mathbb{R}^3$ paraboloidin $z = x^2 + y^2$ ja tason $z = 1$ rajaama kappale ja olkoon S sen pinta, suunnistettuna ulospäin. Laske

$$\iint_S (y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Tehtävä 3: Olkoon C_1 jana pisteestä $(-1,0,0)$ pisteeseen $(1,0,0)$, ja olkoon C_2 puoliympyrä $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $y \geq 0$. Olkoon S mikä tahansa sellainen sileä pinta, jonka reuna koostuu janasta C_1 ja puoliympyrästä C_2 ja jolla on ylöspäin suunnattu normaali. Olkoon vielä

$$\mathbf{F} = (\alpha x^2 - z)\mathbf{i} + (xy + y^3 + z)\mathbf{j} + \beta y^2(z+1)\mathbf{k}.$$

Etsi α:n ja β:n arvot, joilla $I = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ on riippumaton S:n valinnasta, ja etsi I:n arvo tällaisille α ja β.

Tehtävä 4: Tarkastellaan pallokoordinaatteja

$$\begin{cases} x &= \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\varphi, \end{cases}$$

missä $\rho \geq 0$, $0 \geq \varphi \geq \pi$ ja $0 \geq \theta \geq 2\pi$.

a) Laske koordinaattikäyrien tangenttivektorit sekä skaalauskertoimet. (3 p.)

b) Etsi funktion $f(\rho,\theta,\varphi) = 2\rho + \theta\varphi$ gradientti pallokoordinaateissa. (2 p.)

c) Mitä tiedetään vektorikentän $\mathbf{F}(\rho,\theta,\varphi) = \nabla f(\rho,\theta,\varphi)$ pyörteisyydestä? Miksi? (1 p.)

Seuraavia kaavoja saa käyttää todistamatta:

$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g, \\
\nabla \cdot (f\mathbf{F}) &= (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F}), \\
\nabla \times (f\mathbf{F}) &= (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F}).
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \iint_{\partial D} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

$$\iiint_D f(\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV + \iiint_D \nabla f \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial D} f\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\mathbf{e}_u & h_v\mathbf{e}_v & h_w\mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(r, φ, z): $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$, $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$
(ρ, φ, θ): $x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = \rho\cos(\varphi)$, $dV = \rho^2\sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$