

## ELEC-E8104 Stochastic models and estimation (5 op)

Tentti/Exam 20.10.2015

Tentissä saa käyttää tentissä jaettua kaavakokoelmaa.

*It is allowed to use the delivered Collection of important formulas for this course*

✓  
1.

- a) Mikä on ML ja MAP estimaattoreiden oleellisin ero?  
*a) What is the most significant difference between ML and MAP estimators?*  
(1 p)
- b) Milloin estimaattori on harhaton?  
*b) When the estimator is said to be unbiased?*  
(1 p)
- c) Milloin kannattaa käyttää informaatiomuotoista Kalman suodatinta, milloin 'tavallista' formulointia ?  
*c) In what cases it is beneficial to use Information filter, in what cases 'normal' Kalman filter?*  
(1 p)
- d) Mikä Kalman suodattimen kaavoissa kuvaa tilaestimaatin tarkkuutta?  
*d) In the Kalman filter equations, what describes the accuracy of state estimate?*  
(1 p)
- e) Jos Kalman suodin toimii oikein, millaista jakaumaa mittausresiduaali noudattaa? Mitkä ovat jakauman parametrit?  
*e) If the Kalman filter is working properly, what kind of distribution the measurement residual follows? What are the parameters of the distribution?*  
(1 p)
- f) Miten ensimmäisen ja toisen asteen laajennetut Kalman suotimet eroavat "tavallisesta" Kalman suotimesta? Mitä riskejä on ensimmäisen tai toisen asteen laajennetun Kalman suotimen käytössä?  
*f) What are the differences between the first and second order extended Kalman filter and "normal" Kalman filter? What risks there are using first or second order extended Kalman filter?*  
(1 p)

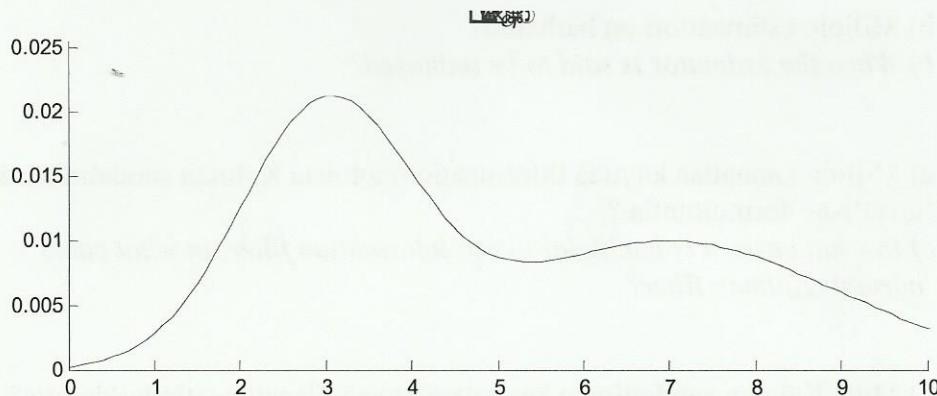
2.

Kuvassa on todennäköisyysjakauma, joka on kahden normaalijakauman summa. Parametrit on annettu alla.

*In the figure, there is a probability density function of a distribution that is a weighted sum of two Gaussian densities. The parameters are given below.*

$$p(x|z) = \sum_{j=1}^2 p_j \mathcal{N}(x; x_j, P_j)$$

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0.5 & x_1 = 3 & P_1 = 1 \\ p_2 = 0.5 & x_2 = 7 & P_2 = 2 \end{array}$$



Esitä kaavoja käyttäen MAP ja MMSE estimaattorit. Mitkä ovat estimaatit (estimaattorien arvot) tässä tapauksessa?

*Present MAP and MMSE estimators using equations. What are the estimates (the values of the estimators) in this case?*

(6 p)

3. Olkoon saatavissa kolme mittausnäytettä.

*Let there be three measurements*

	#1	#2	#3
<b>input x</b>	1	2	3
<b>output y</b>	3	5	6

Tunnetaan mallirakenne

*The model structure is known*

$$y = ax + b$$

Estimoi tuntemattomat parametrit  $a$  ja  $b$  pienimmän neliösumman ei-rekursiivisella menetelmällä. Kaikilla mittauksilla on sama painoarvo.

*Estimate the unknown parameters  $a$  and  $b$  using least squares non-recursive algorithm. All measurements have the same weight.*

(6 p)

4.

Selosta lyhyesti monimallilähetymistavan (Multiple Model approach, MM) keskeisiä ideoita tilaestimoinnissa. Missä tilanteissa käyttäisit lähestymistapaa? Mitä vaihtoehtoisia tapoja estimoinnille on ko. tilanteissa?  
*Describe shortly the central ideas of Multiple Model Approach (MM) in the state estimation. In which situations you would use MM? What alternative solutions you could use in those situations?*

(6 p)

5.

Suunnittele diskreetti laajennettu Kalmansuodin traktorille, jonka jatkuva-aikaisessa mallissa tiloina ovat 2D-paikka, ajosuunta ja nopeus.  
*Find a discrete extended Kalman filter for a tractor having the following continuous time model, in which 2D-position, heading angle and speed are the state variables*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4 \cos(x_3) + w_1 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \sin(x_3) + w_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \frac{\tan \alpha}{a} + w_3 \\ \dot{x}_4 &= w_4\end{aligned}$$

jossa  $\alpha$  ohjauskulma. Paikka pystytään mittamaan tarkalla GPS-laitteella ja suunta sähkökompassilla, joiden mittausvirhe oletetaan nollakeskiarvoiseksi ja gaussiseksi. Kaikki mittaukset saadaan CAN-väylältä 100 ms välein. Sähkökompassin mittaus on kuitenkin viivästyntä yhden syklin verran.

*As inputs,  $\alpha$  is the steering angle. The position is measured with an accurate GPS and the heading with electric compass. The measurements are disturbed with Gaussian distributed noise. All measurements are read from a CAN-bus with 100 ms intervals. However, the compass measurement is one cycle delayed.*

Diskretoinnin voi tehdä Eulerin menetelmällä, jonka voi johtaa suoraan derivaatan määritelmästä. *The system can be discretized with Euler method, which can reasoned on the basis of definition of derivative.*

$$\dot{x} = f(x, u, t) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}.$$

(6 p)