Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, Perustieteiden korkeakoulu Kinnunen

MS-C.1350 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Loppukoe 27.10.2016 kello 13:00-16:00

Tämä tehtäväsarja on vain syksyn 2016 kurssin osallistujille. Tämä loppukoe vaikuttaa 50 prosenttia kurssin arvosteluun, toinen 50 prosenttia tulee laskuharjoituksista ja ennakkotehtävistä. Jos haluat suorittaa koko kurssin loppukokeella, niin pyydä erillinen tehtäväpaperi valvojalta.

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää ja jos väite on epätosi, niin perustele vastauksesi lyhyesti.

   (a) Jos $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on aaltoyhtälön ratkaisu, niin $u(x,-t)$ on aaltoyhtälön ratkaisu.

   (b) Jos $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on aaltoyhtälön ratkaisu, niin $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ on aaltoyhtälön ratkaisu jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Aaltoyhtälön ratkaisu voi saavuttaa maksiminsa määrittelyalueen sisäpisteessä.

   (d) Jos yksiulotteisen aaltoyhtälön ratkaisu on nolla kaikissa pisteissä annetulla ajanhetkellä, niin se on identtisesti nolla kaikilla aikaisemmilla ajanhetkillä.

   (e) Jos kaksiulotteisen aaltoyhtälön Cauchyn ongelman alkuarvot ovat aidosti positiivisia kaikissa pisteissä, niin aaltoyhtälön ratkaisu on aidosti positiivinen kaikkialla.

   (f) Jos kolmeulotteisen aaltoyhtälön Cauchyn ongelman alkuarvoja häiritään origon lähellä, niin tämä vaikuttaa ratkaisuun annetussa pisteessä tietystä ajanhetkestä alkaen ikuisesti.

2. (a) Muotoile täsmällisesti Laplacen yhtälön Dirichletin ongelma tason yksikkökiekossa.

   (b) Selosta, miten tämä ongelma ratkaistaan muuttujien separointimenetelmällä. Pelkkä päävaiheiden lyhyt sanallinen kuvailu riittää.

3. Tarkastellaan yhtälöä $-\Delta u + u = f$, missä $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Johda ratkaisukaava

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi.$$

Ohje: $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

4. Kerro miten alla olevat ongelmat ratkaistaan joko antamalla ratkaisukaava tai selittämällä sanallisesti.

(a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Ohje: Lämpöyhtälön perusratkaisu on $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

5. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko sekä $T > 0$.

(a) Muotoile maksimiperiaate lämpöyhtälölle joukossa $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, maksimiperiaatetta ei tarvitse todistaa.

(b) Selosta lyhyesti, miten maksimiperiaatetta voidaan käyttää ratkaisun yksikäsitteisyyden näyttämiseen.