Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Korte/Lindfors
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI), syksy 2015

1. välikoe 18.11.2015 klo 16.30–18.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Määritä funktion $f(x) = x\cos(3x)$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.
   Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi, kun $x_0 = 0$.

2. Laske raja-arvot

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x+\pi)}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}.$$

3. Olkoon $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
   a) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.
   b) Päättele käänteisfunktion arvo $f^{-1}(2)$ ja laske sitä käyttämällä käänteisfunktion derivaatta

$$(f^{-1})'(2).$$

   Huom: Ei kannata yrittää muodostaa käänteisfunktion lauseketta.

4. a) Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

   b) Käyrä $y = x^3$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $0 \le x \le 1$. Laske näin syntyvän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala.

Käännä!

$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$-x^{\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$\int f' \cdot f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}$$

$$\int f'(x) f(x)^n = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}, \quad \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä Maclaurin-polynomiapproksimaatioita:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \\
(1+x)^r &\approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots
\end{aligned}$$

Muita kaavoja ilman selityksiä:

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \\
A &= 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \\
\ell &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n!} f^n(x_0)(x - x_0)^n$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$D\sin x = \cos x$$

$$D f \circ g = g' f'(g)$$