

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)

Loppukoe 15.12.2016 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Valitse viisi (5) tehtävää seuraavista! Jos vastaat kaikkiin tehtäviin, merkitse selvästi, mitkä 5 arvostellaan.

1. Merkitään

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k (k+1)x^k.$$

- Funktio f on määritelty eräällä välillä $-R < x < R$. Määritä luku R .
- Millainen sarjakehitelmä saadaan derivaatalle $f'(x)$?
- Laske $f(0)$ ja $f'(0)$.

2. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{\sin(x^2 - 1)}.$$

b) Määritä integraalin

$$\int_0^1 x^2 \cos(x^2) dx$$

likiarvo (murtolukuna) korvaamalla integroitava funktio sen 6:nneen asteen Maclaurin-polynomilla $P_6(x)$. (Paperin toisella puolella olevista kaavoista voi olla apua tässä tehtävässä.)

3. a) Laske integraali

$$\int_0^2 3\sqrt{1+4x} dx.$$

b) Määritä integraalifunktio

$$\int x^n \ln x dx,$$

kun $n \in \mathbf{N}$.

Käännä!

4. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

tai osoita, että se hajaantuu.

Vihje: Välivaiheissa voi käyttää sijoitusta $x = e^t$.

5. Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö $y' = -y^3$

a) alkuehdolla $y(0) = 1/3$. (5 p.)

b) alkuehdolla $y(0) = 0$. (1 p.)

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 3y' - 10y = 100e^{-3x}$ yleinen ratkaisu.

Lisätieto: Eräitä trigonometrinen funktioiden arvoja:

α	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1
$\tan(\alpha)$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0

Eräitä Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa 5 laskaripistettä!

Huom. 2: Tämän kokeen voi uusia tammikuun tentin yhteydessä, jolloin parempi tulos jää voimaan. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin!**