Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu — Alestalo/Lehtelä
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0106 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ENG2)

Loppukoe 15.12.2016 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Valitse viisi (5) tehtävää seuraavista!

1. Merkitään
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k(k+1)x^k.$$
   a) Funktio f on määritelty eräällä välillä $-R < x < R$. Määritä luku R.
   b) Millainen sarjakehitelmä saadaan derivaatalle $f'(x)$?
   c) Laske $f(0)$ ja $f'(0)$.

2. a) Laske raja-arvo
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{\sin(x^2 - 1)}.$$
   b) Määritä integraalin
$$\int_0^1 x^2 \cos(x^2)\, dx$$
   likiarvo (murtolukuna) korvaamalla integroitava funktio sen 6:nnen asteen Maclaurin-polynomilla $P_6(x)$. Kääntöpuolen kaavoista voi olla hyötyä.

3. a) Laske integraali
$$\int_0^2 3\sqrt{1+4x}\, dx.$$
   b) Määritä integraalifunktio
$$\int x^n \ln x\, dx,$$
   kun $n \in \mathbf{N}$.

Käännä!

4. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x \ln x}$$

tai osoita, että se hajaantuu.
Vihje: Välivaiheissa voi käyttää sijoitusta $x = e^t$.

5. Ratkaise separoituva differentiaaliyhtälö $y' = -y^3$
a) alkuehdolla $y(0) = 1/3$. (5 p.)
b) alkuehdolla $y(0) = 0$. (1 p.)

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 3y' - 10y = 100e^{-3x}$ yleinen ratkaisu.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\ e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ \ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \\ \sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \end{aligned}$$

Huom. 1: Saat yhden koepisteen, kun vastaat kurssin palautekyselyyn **ja** STACK-tutkimuslupaa koskevaan kysymykseen; myös kielteinen vastaus kelpaa.

Huom. 2: Tämän kokeen voi uusia tammikuun tentin yhteydessä, jolloin parempi tulos jää voimaan. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

MS-A0106 – LOPPUKOE / RATKAISUT

1. a) $a_k = 3^k(k+1)x^k \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3^{k+1}(k+2)|x|^{k+1}}{3^k(k+1)|x|^k} = 3\cdot\frac{k+2}{k+1}|x| \to 3|x|$ $(k\to\infty)$

SUHDETESTI: SUPPENEE, JOS $3|x|<1 \Rightarrow |x|<1/3 \Rightarrow \underline{\underline{R = 1/3}}$

b) $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k(k+1)k\,x^{k-1} = 6 + 56x + \ldots$

c) $f(0) = 3^0\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$, $f'(0) = \underline{\underline{6}}$

---

2. a) MUOTOA "$\frac{0}{0}$", KUN $x=1$. KOKEILLAAN L'HOSPITALIN SÄÄNTÖÄ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{\sin(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{4x^3+6x^2-4x+2}{2x\cos(x^2-1)} = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$

LOPPUTULOS PERUSTELEE =

b)

$$\cos(x^2) \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^4 \Rightarrow x^2\cos(x^2) \approx x^2 - \frac{1}{2}x^6 = P_6(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2\cos(x^2)\,dx \approx \int_0^1\left(x^2 - \frac{1}{2}x^6\right)dx = \Big/_0^1\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{14}x^7\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{14} = \underline{\underline{\frac{11}{42}}}$$

---

3. a) $\int_0^2 3\sqrt{1+4x}\,dx = \Big/_0^2 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(1+4x)^{3/2} = \frac{1}{2}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 26 = \underline{\underline{13}}$

b) OS.INT.

$$\int x^m \ln x\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}\cdot\ln x - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln x}{m+1}x^{m+1} - \underbrace{\frac{1}{m+1}\int x^m\,dx}_{\frac{1}{(m+1)^2}x^{m+1}+C}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right)x^{m+1} + C}}$$

$f'(x) = x^m \Rightarrow f(x) = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$

$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = 1/x$

4. $$\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_0^\infty \frac{e^t\,dt}{e^t \ln(e^t)} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}$$

$x = e^t$

$dx = e^t\,dt$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{dt}{t} = \underbrace{\Big/_0^1 \ln t + \Big/_1^\infty \ln t}_{\text{TULKITAAN RAJA-ARVONA } R\to\infty}$$

MOLEMMAT HAJAANTUVAT $\Rightarrow$ HAJAANTUU

---

5. $y' = -y^3 \Rightarrow -\dfrac{dy}{y^3} = dx \Rightarrow -\displaystyle\int \frac{dy}{y^3} = \int dx = x + C'$

$\Rightarrow +2y^{-2} = x + C' \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{2x+2C'} \Rightarrow y(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2x+C}}$, $C = 2C'$

a) $y(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow$ + MERKKI JA $C = 9 \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+9}}$

b) $y(0) = 0 \Rightarrow \pm\dfrac{1}{\sqrt{C}} = 0$? KYSEESSÄ ERIKOISRATKAISU $y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

---

6. HY $y'' + 3y' - 10y = 0$ KY $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$

EHY YRITE $y_0(x) = Ae^{-3x} \Rightarrow y_0'(x) = -3Ae^{-3x}$, $y_0''(x) = 9Ae^{-3x}$

SIJ.

$\Rightarrow 9Ae^{-3x} + 3\cdot(-3A)e^{-3x} - 10Ae^{-3x} = 100e^{-3x}$

$\Leftrightarrow -10Ae^{-3x} = 100e^{-3x} \quad \forall x \Rightarrow A = -10$

YLEINEN RATKAISU ON

$$y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} - 10e^{-3x}$$