4. Suodattimen puolentehon kaistanleveys annettu vaatimuksessa (I).

$$W = B_{-3\text{dB}} = 10 \text{ kHz}$$

Enää tarvitsee määrätä asteluku n mahdollisimman pieneksi, mutta kuitenkin s.e. vaatimukset (II) ja (III) täyttyvät.

Amplitudifunktio on alueella $f > 0$ aidosti laskeva. Tästä seuraa

$$A(f_1) > A(f_2).$$

kun

$$f_1 < f_2.$$

Tämä tarkoittaa, että jos amplitudifunktio toteuttaa ehdon taajuusalueen alarajalla, se toteuttaa ehdon koko alueella. Tämän avulla vaatimuksista (II) ja (III) saadaan ehdot

$$A(32000) \leq 10^{-30/20}$$

ja

$$A(70000) \leq 10^{-50/20}.$$

Suodatin on astelukua $n = 3$. Asteluvun voi ratkaista kokeilemalla tai ratkaisemalla n:n amplitudifunktion lausekkeesta ja pyöristämällä luku ylöspäin. Ehtojen rajalla saadaan n:n arvot 2.96899 ja 2.95823.

2p jotain hyödyllistä asiaa suunnittelusta mainittu + 4p oikeasta kaistanleveydestä $W = 10$ kHz + 4p oikeasta asteluvusta $n = 3$

5. (a) Vaste

$$y_a(t) = a_1 x_a(t) + a_3 x_a^3(t) = a_1 \left(\sqrt{2}\cos(\omega_a t)\right) + a_3 \left(\sqrt{2}\cos(\omega_a t)\right)^3 = \sqrt{2} a_1 \cos(\omega_a t) + a_3 2\sqrt{2}\left(\frac{3}{4}\cos(\omega_a t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega_a t)\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}a_1 + a_3 2\sqrt{2}\frac{3}{4}\right)\cos(\omega_a t) + \left(a_3 2\sqrt{2}\frac{1}{4}\right)\cos(3\omega_a t) = \frac{2a_1 + 3a_3}{\sqrt{2}}\cos(\omega_a t) + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\cos(3\omega_a t)$$

$$= 6.8589 \cdot \cos(\omega_a t) - 0.010309 \cdot \cos(3\omega_a t)$$

Kokonaissärökerroin

$$d_{tot} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} d_n^2} = \sqrt{d_3^2} = d_3 = \frac{|u_3|}{|u_1|} = \frac{|\frac{a_3}{\sqrt{2}}|}{|\frac{2a_1+3a_3}{\sqrt{2}}|} = |\frac{a_3}{2a_1 + 3a_3}| \approx 0.010309 \approx 1\%$$

2p jotain hyödyllistä asiaa kokonaissärökertoimesta mainittu + 3p oikeasta kokonaissärökertoimesta $d_{tot} \approx 1\%$.

(b) Sovitaan

$$x_b(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}\cos(2\pi \cdot 500 \cdot t) + \sqrt{\frac{1}{2}}\cos(2\pi \cdot 1500 \cdot t) = A\cos(\omega_0 t) + A\cos(3\omega_0 t) = A\left(\cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)\right)$$

Vaste

$$y_b(t) = a_1 x_b(t) + a_3 x_b^3(t) = a_1 A\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)\right] + a_3 A^3\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)\right]^3$$

$$= a_1 A\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)\right] + a_3 A^3\left[\cos^3(\omega_0 t) + 3\cos^2(\omega_0 t)\cos(3\omega_0 t) + 3\cos(\omega_0 t)\cos^2(3\omega_0 t) + \cos^3(3\omega_0 t)\right]$$

$$= a_1 A\left[\cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)\right] + a_3 A^3\left[\frac{3}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega_0 t) + \frac{3}{4}\cos(5\omega_0 t) + \frac{3}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{3}{2}\cos(3\omega_0 t)\right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\cos(7\omega_0 t) + \frac{3}{4}\cos(5\omega_0 t) + \frac{3}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{3}{4}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{4}\cos(9\omega_0 t)\right]$$

Sen enempää sieventämättä nähdään vasteen sisältävän kulmataajuuksia ω_0, $3\omega_0$, $5\omega_0$, $7\omega_0$ ja $9\omega_0$, eli taajuuksia 500Hz, 1500Hz, 2500Hz, 3500Hz ja 4500Hz.

1p per oikea taajuus

6. (a)

$$P = E\{x^2(t)\} = E\{x(t)x^*(t)\} = E\{x(t)x^*(t+0)\} = r_{xx}(0) = 1$$

1p jotain hyödyllistä asiaa stokastisen prosessin tehosta + 2p oikea keskimääräinen teho $P = 1$

(b) Autokorrelaatiofunktio kolmiopulssina voidaan nähdä kahden kanttipulssin konvoluutiona.

$$r_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1 \end{cases} = \text{tri}\left(\frac{\tau}{1}\right) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{1}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{\tau}{1}\right)$$

Kaavakokoelman s.2 konvoluution Fourier'n muunnos ja s.3 suorakaidepulssin Fourier'n muunos.

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{\tau}{1}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{\tau}{1}\right)\right\} = \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{\tau}{1}\right)\right\} \cdot \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{\tau}{1}\right)\right\}$$

$$= 1\text{sinc}(1f) \cdot 1\text{sinc}(1f) = \text{sinc}^2(f)$$

Jotta kaavakokoelman s.3 kolmiopulssin Fourier'n muunnos toimisi, tulee tri:n τ:na käyttää puolta pituudesta. Tehtävässä tulee olla sekoittamatta autokorrelaation muuttujaa τ kaavakokoelman kaavoissa esiintyvien muuttujien τ kanssa.

1p järkevästä ratkaisutavasta, eli siististä integraalista tai oikeiden kaavojen käyttämisellä + 2p oikeasta tehospektristä

(c) Ratkaistaan järjestelmän siirtofunktio D.Y:stä

$$\frac{dy}{dt} = x(t) - y(t).$$

Järjestellään termit puolillen ja Fourier'n muunnetaan D.Y.

$$2\pi j f Y(f) + Y(f) = (2\pi j f + 1)\, Y(f) = X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + 2\pi j f}$$

Vasteen tehospektri

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f) = H(f)H^*(f)S_{xx}(f) = \frac{1}{1+2\pi j f}\frac{1}{1-2\pi j f}S_{xx}(f) = \frac{\text{sinc}^2(f)}{1+4\pi^2 f^2}$$

1p D.Y:n Fourier'n muuntamisesta + 1p oikeasta siirtofunktiosta + 2p oikeasta tehospektristä