Vastaa kaikkiin tehtäviin.
Jokainen tehtävä on 12 pisteen arvoinen. Perustele vastauksesi (lyhyesti).
Sallittu oheismateriaali: taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät) ja oma, ohjeiden mukainen kaavakokoelma.
Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit – myös tyhjät ja suttupaperit sekä oma kaavakokoelma. Tehtäväpaperin saat pitää.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin lyhyesti ja kattavasti. Jos kirjoitat vastauksen kaavana, selitä kaava. Jokainen kohta on 2 pisteen arvoinen.

(a) Mikä on magneettikentänvoimakkuuden SI-yksikkö?

(b) Mitä tarkoittaa, että kenttä on konservatiivinen?

(c) Selitä integraalimuotoinen Gaussin laki.

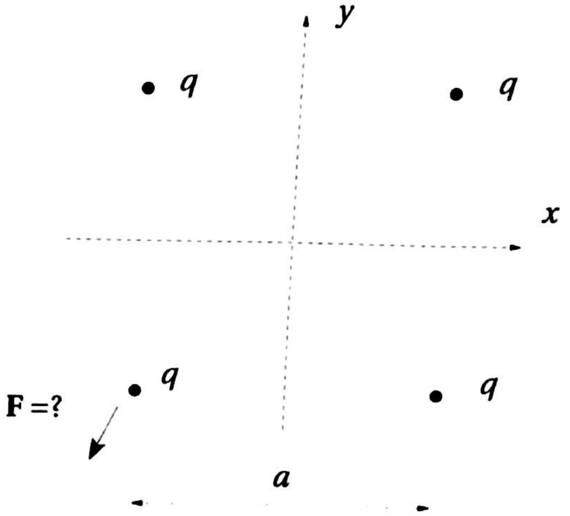
(d) Mitkä ovat rajapintaehdot sähkökentänvoimakkuudelle ja sähkövuontiheydelle kahden dielektrisen materiaalin rajapinnalla? (Pinnalla ei ole pintavarausta: $\rho_s = 0$)

(e) Kerro magneettisesta dipolista.

(f) Mikä on Lenzin laki?

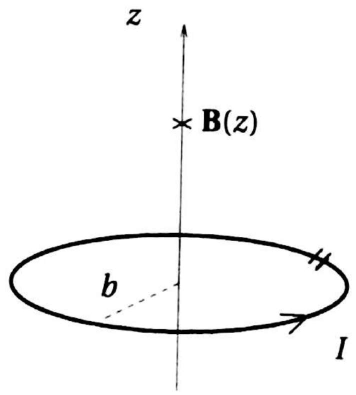
2. Neljä yhtä suurta pistevarausta q sijaitsevat a-sivuisen neliön kärkipisteissä. Kuinka suuri on yhteen varaukseen kohdistuva sähköstaattinen voima?

Tämän voiman kompensoimiseksi sijoitetaan origoon pistevaraus q_k. Mitoita sen suuruus siten, että varaukseen q kohdistuva kokonaisvoima häviää. Laske tarvittavan uuden varauksen voimakkuus (suhteessa alkuperäisiin varauksiin, eli q_k/q).



3. Tarkastele origokeskistä xy-tasossa sijaitsevaa ympyränmuotoista virtalankaa, jonka säde on b. Siinä kulkee virta I. Laske magneettivuontiheys ympyrän akselilla, siis $\mathbf{B}(z)$.
`Vihje`: Biot-Savartin laki on

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$



1. (a) A/m

(b) Konservatiivisen vektorikenttäfunktion roottori on nolla kaikkialla eli se on pyörteetön. Sen polkuintegraali pisteestä toiseen on riippumaton valitusta polusta. Se voidaan määritellä skalaarifunktion gradienttina.

(c) Integraalimuodossa Gaussin laki kertoo, että kokonaissähkövuo suljetun pinnan läpi (ulospäin) on yhtä suuri kuin pinnan sisällä oleva kokonaisvaraus.

(d) Sähkökentänvoimakkuuden tangenttikomponentti (rajapinnan suuntainen komponentti) on jatkuva (eli sama pinnan molemmin puolin), ja sähkövuontiheyden normaalikomponentti on jatkuva.

(e) Magneettinen dipoli on rakenne, jonka magneettikenttä on samanlainen kuin sähködipolin sähkökenttä. Koska magneettisia varauksia ei ole olemassa, ei magneettista dipolia voi tehdä monopoleista. Virtasilmukan magneettikenttä on kaukana silmukasta dipolin kenttä.

(f) Lenzin laki kertoo, että kun virtapiirin läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, siihen indusoituu sellainen virta, jonka oma magneettikenttä vastustaa alkuperäisen magneettikentän muutosta.

2. Coulombin lain mukaan pisteessä $\mathbf{R}_1$ oleva pistevaraus q_1 kohdistaa pisteessä $\mathbf{R}_2$ olevaan varaukseen q_2 voiman

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3}$$

Tehtävässä pisteessä $-(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})a/2$ sijaitsevaan varaukseen kohdistuu voimia muista kolmesta varauksesta. Lasketaan ne yhteen.

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\hat{\mathbf{x}}a}{|-\hat{\mathbf{x}}a|^3} - \frac{\hat{\mathbf{y}}a}{|-\hat{\mathbf{y}}a|^3} - \frac{(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})a}{|-(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})a|^3}\right)$$

Eli

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\hat{\mathbf{x}}}{a^2} - \frac{\hat{\mathbf{y}}}{a^2} - \frac{\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}}{\left(\sqrt{2}\right)^3 a^2}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Eli voima osoittaa poispäin toisista varauksista, symmetrisesti yksikkövektorin $-(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ suuntaan. Voiman itseisarvo on täten

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$$

Sen voi kumota vetovoimalla kohti muita varauksia. Pannaan origoon vastakkaismerkkinen pistevaraus q_k ja mitoitetaan sen suuruus siten, että voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaiset. Paikkavektori origosta kulmapisteeseen on $-(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})a/2$, jonka pituus (eli varausten välinen etäisyys) on $\sqrt{2}a/2$.

Siksi q_k:n aiheuttama voima tarkasteltavaan varaukseen on

$$\mathbf{F}_k = \frac{q q_k}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})a/2}{|-(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})a/2|^3}, \quad |\mathbf{F}_k| = \frac{|q q_k|}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2}a/2\right)^2} = \frac{|q q_k|}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 2$$

Vaatimalla voimat yhtäsuuriksi ($|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_k|$) saadaan uuden varauksen itseisarvoksi suhteessa q-varaukseen

$$\left|\frac{q_k}{q}\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}9571$$

ja q_k on tietysti erimerkkinen kuin q, jotta voima olisi vetovoima.

3. Lasketaan magneettikenttä z-akselilla Biot-Savartin laista

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{R}}{R^3}$$

missä $d\mathbf{l}$ on differentiaalinen virta-alkio (huomaa, että se on vektori, eli että sillä on suunta) ja $\mathbf{R}$ on vektori virta-alkiosta tarkasteltavaan kenttäpisteeseen z-akselilla.

Nyt on virta-alkio $d\mathbf{l} = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, b\, d\phi$ ja vektori $\mathbf{R} = -\hat{\mathbf{r}}\, b + \hat{\mathbf{z}}\, z$.

Integroidaan pitkin silmukkaa, jolloin saadaan

$$\mathbf{H}(z) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}\times(-\hat{\mathbf{r}}\, b + \hat{\mathbf{z}}\, z)}{\left(\sqrt{b^2+z^2}\right)^3}\, b\, d\phi = \frac{Ib}{4\pi\left(\sqrt{b^2+z^2}\right)^3}\left(b\int_0^{2\pi}\hat{\mathbf{z}}\, d\phi + z\int_0^{2\pi}\hat{\mathbf{r}}\, d\phi\right) = \frac{\hat{\mathbf{z}}2\pi I b^2}{4\pi\left(\sqrt{b^2+z^2}\right)^3}$$

Huomaa, että jälkimmäinen integraali antaa nollan:

$$\int_0^{2\pi}\hat{\mathbf{r}}\, d\phi = \int_0^{2\pi}(\hat{\mathbf{x}}\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\phi)\, d\phi = 0$$

Magneettivuon tiheys z-akselilla:

$$\mathbf{B}(z) = \mu_0\mathbf{H}(z) = \frac{\hat{\mathbf{z}}\mu_0 I b^2}{2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}}$$