

Vastaa kaikkiin tehtäviin.

Jokainen tehtävä on 12 pisteen arvoinen. Perustele vastauksesi (lyhyesti).

Sallittu oheismateriaali: taskulaskin (myös ohjelmoitavat ja graafiset laskimet käyvät) ja oma, ohjeiden mukainen kaavakokoelma.

Palauta vähintään yksi nimelläsi varustettu konsepti. Palauta *kaikki* saamasi yliopiston konseptiarkit – myös tyhjät ja suttupaperit sekä oma kaavakokoelma. Tehtäväpaperin saat pitää.

4. Vastaa seuraaviin kysymyksiin lyhyesti ja kattavasti (tai selitä kysytty käsite). Jos kirjoitat vastauksen kaavana, selitä kaava. Jokainen kohta on 2 pisteen arvoinen.

- (a) Ominaisimpedanssi.
- (b) Milloin johtavuutta sisältävä aine on hyvä eriste, kun tarkastellaan aikaharmonista sähkömagneettista kenttää, joka värähtelee kulmataajuudella ω ?
- (c) Mikä on seuraavan sähkökenttäosoittimen mukaisen tasoaallon polarisaatio ja mahdollinen kätisyys:

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})E_0(2 + j)e^{-jkz}$$

- (d) Millä tavalla kokonaisheijastuksen rajakulma riippuu tulevan aallon polarisaatiosta?
- (e) Katkوتاajuus.
- (f) Antennin lähetysteho on $P_t = 10\text{ W}$, sen vahvistus on $G_t = 10\text{ dB}$ ja sen säteilyhyötysuhde 80%. Kuinka suuri on antennin säteilemä kokonaisteho?

5. Tarkastellaan tasoaallon heijastusta, kun aalto tulee ilmasta ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) tasorajapintaan, jonka materiaaliparametrit ovat $\epsilon_r = \mu_r = 2$, ja aallon tulokulma on $\theta_i = 45^\circ$.

- (a) Laske yhdensuuntaispolarisaation heijastuskerroin $\Gamma_{\parallel}$.
- (b) Laske kohtisuorapolarisaation heijastuskerroin $\Gamma_{\perp}$.
- (c) Jos tuleva aalto on oikeakätisesti ympyräpolarisoitunut, mikä on heijastuneen aallon polarisaatio. Perustele.

6. Suorakulmaisessa aaltoputkessa, jonka poikkileikkauksen mitat ovat $a \times b$, etenee TE_{10} -aaltomuoto positiivisen z -akselin suuntaan. Sen sähkökenttäosoitin on

$$\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}}E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

- (a) Laske Maxwellin yhtälöistä magneettikentän osoitin $\tilde{\mathbf{H}}$.
- (b) Laske sähkö- ja magneettikentistä lauseke $\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*$.
- (c) Kuinka paljon ja mihin suuntaan tämä aalto kuljettaa keskimäärin tehoa?

4. (a) Ominaisimpedanssi (merkitään Z_0) on siirtojohdon ominaisuus. Se on siis eri asia kuin tasoaaltojen yhteydessä käytetty väliaineimpedanssi, joka taas on riippuvainen aineen materiaali-parametreista. Ominaisimpedanssi on siirtojohdolla etenevän jännite- ja virta-aallon suhde: $Z_0 = V_0^+ / I_0^+$ ja sen avulla voi laskea siirtojohdossa etenevän tehon $|V_0^+|^2 / (2Z_0)$.
- (b) Johtavuus voidaan ottaa huomioon yleistämällä aineen permittiivisyys kompleksiluvuksi (ks. luento 8):

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

Ideaalieristeessä imaginaariosa häviää, ja aine on sitä parempi eriste, mitä pienempi imaginaariosa on reaalisuuteen verrattuna. Jos on annettu kiinteä johtavuuden arvo σ , on aine hyvä eriste riittävän suurilla taajuuksilla (koska ω on imaginaariosan nimittäjässä.)

Oppikirjan nyrkkisääntö antaa hyvälle eristeelle ehdon $\epsilon'' < \epsilon' / 100$, eli kulmataajuuden olisi oltava suurempi kuin $100\epsilon / \sigma$.

- (c) Tarkastellaan aikariippuvaa sähkökenttävektoria:

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \left\{ (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) E_0 (2 + j) e^{-jkz} e^{j\omega t} \right\} = (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) E_0 [2 \cos(\omega t - kz) - \sin(\omega t - kz)]$$

Toisin sanoen kyseessä on lineaarinen polarisaatio (sähkökenttävektori värähtelee edestakaisin xy -tasossa 45 asteen kulmassa akseleihin nähden.) Kätisyydestä ei voi puhua. (Tässä oletettiin E_0 reaaliseksi, mutta sen mahdollinen kompleksisuus ei vaikuta millään tavalla polarisaatioon.)

- (d) Ei mitenkään. Kokonaisheijastuksen rajakulma määräytyy materiaali-parametrien kontrastista rajapinnalla. Kokonaisheijastus tapahtuu, kun aine tulee taitekertoimeltaan suuremmasta aineesta (1) pienempään (2) riittävän loivassa kulmassa. Rajakulma θ_c vastaa tapausta, jossa Snellin laki ennustaa taitekulmaksi 90° , eli

$$\theta_c = \arcsin \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$$

- (e) Katkotaajuus f_c on olennainen käsite aaltoputkissa, joissa matalataajuiset kentät eivät voi edetä. Katkotaajuus on tietyllä aaltomuodolle ominainen taajuus: se rajataajuus, jota pienemmät taajuudet hiipuvat putkessa, mutta jota suuremmat taajuudet etenevät ja kuljettavat tehoa. Katkotaajuuden yläpuolella etenemiskerroin β riippuu epälineaarisesti värähtelytaajuudesta ω ja katkoaaltoluvusta k_c :

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - (2\pi f_c)^2 \mu \epsilon}$$

- (f) Määritelmän mukaan antennin säteilytehon ja lähetystehon suhde on säteilyhyötysuhde. Siksi 80 prosentin säteilyhyötysuhteella saadaan 10 watin lähetystehosta säteilemään 8 wattia. (Vahvistus G ei vaikuta tähän laskelmaan.)

5. Heijastuskertoimet ovat yhdensuuntais- ja kohtisuorapolarisaatioille:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}, \quad \Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 / \cos \theta_t - \eta_1 / \cos \theta_i}{\eta_2 / \cos \theta_t + \eta_1 / \cos \theta_i}$$

Tulokulma on θ_i ja läpäisykulma θ_t saadaan Snellin laista

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

missä $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r1}} = 1$ ja $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r2}} = 2$. Koska $\theta_i = 45^\circ$, saadaan $\theta_t \approx 20,7^\circ$. Ja sen kosini (jota tarvitaan heijastuskertoimissa)

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sin\theta_i\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sin 45^\circ\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

Nyt on

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{2\mu_0}{2\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

joten $\eta_2 = \eta_1$ ja heijastuskertoimet yksinkertaistuvat.

(a)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\parallel} &= \frac{\cos\theta_t - \cos\theta_i}{\cos\theta_t + \cos\theta_i} = \frac{\sqrt{\frac{7}{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{7}{8}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{4}}{\sqrt{7} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{7} - 2)^2}{(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)} = \frac{7 + 4 - 4\sqrt{7}}{7 - 4} \\ &= \frac{1}{3}(11 - 4\sqrt{7}) \approx 0,139 \end{aligned}$$

(b)

$$\Gamma_{\perp} = \frac{1/\cos\theta_t - 1/\cos\theta_i}{1/\cos\theta_t + 1/\cos\theta_i} = \frac{\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\cos\theta_i + \cos\theta_t} = -\Gamma_{\parallel} = \frac{1}{3}(-11 + 4\sqrt{7}) \approx -0,139$$

(c) Tuleva aalto on ympyräpolarisoitunut, joten sen sähkökentän kaksi kohtisuoraa komponenttia ovat yhtäsuuret ja 90 asteen vaiheierroissa. Heijastuksen jälkeen komponenttien amplitudit ovat yhä yhtäsuuret (koska $|\Gamma_{\parallel}| = |\Gamma_{\perp}|$) ja heijastunut aalto on yhä ympyräpolarisoitunut, mutta koska heijastuskertoimet ovat erimerkkiset, on toisen komponentin suunta vaihtunut. Siksi pyörimissuunta vaihtuu heijastuksessa. Mutta koska samalla aallon etenemissuunta vaihtuu, käтisyys säilyy.

Eli heijastunut aalto on oikeakätisesti ympyräpolarisoitunut.

6. TE₁₀-aaltomuodon sähkökenttäosoitin on

$$\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

(a) Faradayn laista $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}$ saadaan

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{1}{-j\omega\mu} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{j}{k\eta} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{j}{k\eta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \tilde{E}_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{j}{k\eta} \left(\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} - \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \right) \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{j\pi E_0}{k\eta a} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} - \hat{\mathbf{x}} \frac{\beta E_0}{k\eta} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* &= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}}E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \times \left[\hat{\mathbf{z}} \frac{-j\pi E_0^*}{k\eta a} \cos \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta z} - \hat{\mathbf{x}} \frac{\beta E_0^*}{k\eta} \sin \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta z} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\hat{\mathbf{x}} \frac{j\pi |E_0|^2}{k\eta a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\beta |E_0|^2}{k\eta} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \right] \\ &= -\hat{\mathbf{x}} \frac{j\pi |E_0|^2}{2k\eta a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\beta |E_0|^2}{2k\eta} \sin^2 \frac{\pi x}{a}\end{aligned}$$

(c) Vektorilauseke $\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*$ sisältää siis kaksi komponenttia x - ja z -suuntaiset. Näistä z -suuntainen komponentti kertoo etenevästä tehotiheyden, koska se on reaalinen ja keskimääräinen etenevä tehotiheys on ko. vektorin reaaliosa. (Huomaa myös, että x -suuntainen ristitulon komponentti on puhtaasti imaginaarinen, joten senkään takia se ei osallistu tehon kuljetukseen.)

Keskimääräinen etenevä teho (+ z -suuntaan) saadaan integroimalla aaltoputken poikkipinnan yli:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_s \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \right\} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \frac{\beta |E_0|^2}{k\eta} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dy dx \\ &= \frac{\beta b |E_0|^2}{2k\eta} \underbrace{\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx}_{a/2} = \frac{ab}{4} \cdot \frac{\beta}{k\eta} \cdot |E_0|^2 = \frac{ab}{4} \cdot \frac{\beta}{\omega\mu} \cdot |E_0|^2\end{aligned}$$