CS-C3110 Datasta Tietoon, syksy 2016

HARJOITUSTEHTÄVÄT kierros 1, viikko 45

H1/1. (Konvoluutiosuodin)
Konvoluutiosuodin lasketaan kaavalla

$$g_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m s_{k-m},$$

missä f_k on diskreetti tulosignaali, s_k on suodinjono, ja g_k on lähtösignaali. Laske ja piirrä lähtösignaali, kun
a)

$$f_0 = 1, \quad f_m = 0 \text{ muuten} \tag{1}$$
$$s_0 = 2, \quad s_1 = 1, \quad s_n = 0 \text{ muuten} \tag{2}$$

b)

$$f_0 = 2, \quad f_1 = -1, \quad f_m = 0 \text{ muuten} \tag{3}$$
$$s_0 = -1, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 1, \quad s_n = 0 \text{ muuten} \tag{4}$$

H1/2. (Suodatus taajuusalueessa)
Taajuusalueessa tehtävän 1 konvoluutiokaava tulee muotoon

$$G(\omega) = F(\omega)S(\omega),$$

missä funktiot ovat vastaavien diskreettisignaalien diskreettiaikaisia Fourier-muunnoksia (DFTF):

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega m}.$$

Osoita että tehtävän 1b jonoille f ja s saadaan Fourier-muunnokset

$$F(\omega) = 2 - e^{i\omega} \tag{5}$$
$$S(\omega) = -1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}. \tag{6}$$

Laske näiden tulo $G(\omega) = F(\omega)S(\omega)$ ja vertaa saadun polynomin kertoimia tehtävän 1b lopputulokseen g.

H1/3. (Fourier-muunnos)
Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (DTFT) on määritelty

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega m}.$$

a) Osoita, että käänteismuunnos on

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

b) Ideaalisen alipäästösuotimen Fourier-muunnos (välillä $-\pi \leq \omega \leq \pi$) on

$$H(\omega) = 1, \text{ jos } |\omega| \leq \omega_0, \quad 0 \text{ muuten.}$$

Käyttäen käänteismuunnosta laske vastaava jono h_n ja piirrä se kun $\omega_0 = \pi/2$.

H1/4. (Alimerkkijonohistogrammit)
DNA-molekyyli voidaan kirjoittaa merkkijonona, jossa on e eri kirjainta: A, C, G ja T, esim. ... AAGTACCGTGACGGAT... Oletetaan, että koko merkkijonon pituus on miljoona merkkiä. Haluamme

muodostaa histogrammeja n:n pituisille osamerkkijonoille (jos $n = 1$, niin merkeille A, C, G, T; jos $n = 2$, niin pareille AA,AC, ..., TT jne.). Kuinka suureksi voi n:n valita, jos kuhunkin histogrammin lokeroon halutaan osuvan keskimäärin vähintään 10 osamerkkijonoa?

H1/5. (Korkeaulotteiset avaruudet)
d-ulotteiset datavektorit ovat tasaisesti jakautuneita hyperkuutioon, jonka sivun pituus on 1. Määritellään sisäpisteiksi ne, joiden etäisyys hyperkuution pinnasta on vähintään $\epsilon > 0$. Osoita että sisäpisteiden joukon suhteellinen tilavuus menee nollaan kun $d \to \infty$, toisin sanoen hyvin suurissa dimensioissa lähes kaikki pisteet ovat hyperkuution pinnalla.

H1/6. (Korkeaulotteiset avaruudet)
Luennolla mainittiin ilman todistusta, että n:n pisteen keskimääräinen etäisyys d-ulotteisessa hyperkuutiossa on

$$D(d,n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/d}.$$

Tämä on likimääräinen kaava. Katsotaan erikoistapausta: n pistettä on sijoittunut n:n pienemmän samanlaisen hyperkuution keskipisteisiin, missä pienet hyperkuutiot eivät leikkaa toisiaan mutta niiden unioni on koko hyperkuutio. Osoita että pisteiden etäisyydet ovat

$$D(d,n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/d}$$

kun kahden pisteen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ etäisyys määritellään siten että se on $\max_i |x_{i1} - x_{i2}|$. Kokeile tapausta $d = 2$, $n = 4$ ja totea että tulos pätee.