Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Väisänen

MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

Loppukoe 13.2.2017 klo 9–12.

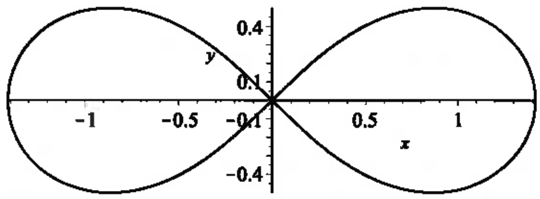
Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Valitse viisi (5) tehtävää, joihin sisältyy tehtävät 1, 5 ja 6.
Tehtäviä 1, 5 ja 6 ei siis voi valita pois.

1. *Bernoullin lemniskaatta* on tasokäyrä, jonka yhtälö on muotoa

$$(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0.$$

a) Miten käyrän yhtälöstä voidaan päätellä, että sillä *saattaa olla* leikkauskohta tai terävä kärki origossa?
b) Tarkastellaan niitä lemniskaatan pisteitä, joissa käyrällä on vaakasuora tangentti. Osoita implisiittisen derivoinnin tai gradientin avulla, että nämä pisteet sijaitsevat yksikköympyrällä $x^2+y^2=1$.
c) Määritä näiden pisteiden koordinaatit.



2. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, jolle

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \text{kun} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Voidaanko $f(0,0)$ määritellä niin, että funktio f on jatkuva origossa?
b) Voidaanko $f(0,0)$ määritellä niin, että $f_x(0,0)$ on olemassa? Huomaa, että osittaisderivaattaa täytyy tutkia erotusosamäärän avulla.
c) Voidaanko $f(0,0)$ määritellä niin, että sekä $f_x(0,0)$ että $f_y(0,0)$ ovat olemassa?

3. Funktio $u = u(x,t)$ toteuttaa 1-ulotteisen aaltoyhtälön $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, kun $c > 0$ on vakio. Tutki ketjusäännön avulla, mikä yhteys vakioiden $a, b \in \mathbf{R}$ välillä täytyy olla, jotta funktio $U(x,t) = u(ax, bt)$ toteuttaa saman aaltoyhtälön $U_{tt} = c^2 U_{xx}$.
Huom: Kirjoita tarkasti kaikki välivaiheet! Merkintä u_x tarkoittaa osittaisderivaattaa muuttujan x suhteen (Adams & Essex -kirjassa u_1).

Käännä!

4. Tarkastellaan funktiota $t \in \mathbf{R}$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2t(xy + yz + xz),$$

kun $t \in \mathbf{R}$ on parametri.
a) Osoita, että funktiolla f on gradientin nollakohta origossa. (1 p)
b) Määritä funktion f Hessen matriisi $H_f(0, 0, 0)$. (2 p)
c) Matriisin $H_f(0, 0, 0)$ ominaisarvot ovat $1 + 2t$ ja $1 - t$ (kaksinkertainen). Millä parametrin t arvoilla funktiolla f on paikallinen minimi kohdassa $(0, 0, 0)$? Tutki myös rajatapaukset esimerkiksi neliöön täydentämällä. (3 p)

5. Määritä funktion $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 + 2y^3$ suurin ja pienin arvo yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ käyttämällä Lagrangen menetelmää.

6. a) Laske tasointegraali

$$\iint_D (3x + 6y)\, dA,$$

kun D on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(2, 0)$ ja $(0, 4)$.
b) Lineaarinen koordinaatistomuunnos

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = 3u + 8v \end{cases}$$

kuvaa erään uv-tason joukon Ω xy-tason joukoksi D. Määritä joukon D pinta-ala $A(D)$, kun tiedetään, että $A(\Omega) = 1$.

Huom. 1: Palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Loppukokeen voi uusia seuraavan tentin yhteydessä, jolloin parempi tulos jää voimaan ja laskaripisteet otetaan huomioon. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.

LOPPUKOE 13.2.2017 RATKAISUT/PJA

1.

a) $g(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$, $\quad g(0,0) = 0$

$$\begin{cases} g_x = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 4x = 0 & \text{JOS } x=y=0 \\ g_y = 2(x^2+y^2)\cdot 2y + 4y = 0 & \text{JOS } x=y=0 \end{cases}$$

YHTÄLÖ EI VÄLTTÄMÄTTÄ ESITÄ KÄYRÄÄ PISTEEN $(0,0)$ LÄHELLÄ

b) $(x^2+y(x)^2)^2 - 2(x^2-y(x)^2) = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx}(\ldots)$

$\Rightarrow 2(x^2+y(x)^2)\cdot(2x+2y(x)y'(x)) - 4x + 4y(x)y'(x) = 0$

Vaakasuora tangentti $\Leftrightarrow y'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x(x^2+y(x)^2-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2+y^2=1}}$ (TAI $x=0$, EI KÄY)

c) $x^2+y^2=1 \Rightarrow 1^2 - 2(x^2-(1-x^2)) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

jolloin $y = \pm\frac{1}{2}$ TULOS: $\underline{\underline{(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)}}$ NELJÄ PISTETTÄ

2.

a)
$$\left.\begin{array}{l} f(x,0) = 1, \text{ KUN } x \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1 \\ f(0,y) = -1, \text{ KUN } y \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = -1 \end{array}\right\} \text{EI VOIDA!}$$

b) Erotusosamäärä $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{1-f(0,0)}{h} \equiv 0 \ \forall h \neq 0$, JOS $f(0,0)=1$

$\Rightarrow$ Voidaan: $\underline{\underline{f(0,0)=1}}$, jolloin $f_x(0,0) = 0$

c) Erotusosamäärä $\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \dfrac{-1-f(0,0)}{h} \equiv 0 \ \forall h \neq 0$, JOS $f(0,0) = -1$

$\Rightarrow f_y(0,0) = 0$, jos $f(0,0) = -1$

Nämä ovat ainoat tapaukset, joista RR $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{ei voida!}}}$

3. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $U(x,t) = u(ax, bt)$

$\Rightarrow U_x(x,t) = u_x(ax,bt)\cdot a + u_t(ax,bt)\cdot 0 = a u_x(ax,bt)$

$U_t(x,t) = u_x(ax,bt)\cdot 0 + u_t(ax,bt)\cdot b = b u_t(ax,bt)$

$\Rightarrow U_{xx} = \ldots = a^2 u_{xx}(ax,bt)$, $U_{tt} = \ldots = b^2 u_{tt}(ax,bt)$

SIJ. $\frac{1}{b^2} U_{tt} = c^2 \cdot \frac{1}{a^2} U_{xx} \Leftrightarrow U_{tt} = \frac{b^2}{a^2} c^2 U_{xx}$

$\Rightarrow$ Vaatimus on $b^2/a^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \pm b}}$.

---

4. a)
$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x + 2ty + 2tz \\ f_y &= 2y + 2tz + 2tx \\ f_z &= 2z + 2tx + 2ty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f(0,0,0) = 0.$$

b)
$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 2t & 2t \\ 2t & 2 & 2t \\ 2t & 2t & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{bmatrix} = H_f(0,0,0)$$

c) KAIKKI OMINAISARVOT $> 0 \Rightarrow$ PAIKALLINEN MINIMI

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2t \geq 0 \\ 1 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t < 1$$

$t = 1$: $f(x,y,z) = (x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow$ MINIMI ORIGOSSA

$t = \frac{1}{2}$: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz$

$= \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0 \Rightarrow$ MINIMI ORIGOSSA

TULOS: $\underline{\underline{-\frac{1}{2} \leq t \leq 1}}$ (MUULLOIN OSA $\lambda > 0$, OSA $< 0 \Rightarrow$ SATULAPISTE)

5. $\nabla g = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} \neq \bar{0}$ joukossa $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ ei erikoistapauksia

Lagrange: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x = \lambda \cdot 2x \\ 6y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+3-\lambda)x = 0 \\ y(3y-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \text{EKA: } x = 0 \text{ tai } 3x+3 = \lambda \\ \text{TOKA: } y = 0 \text{ tai } 3y = \lambda \\ \quad x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$

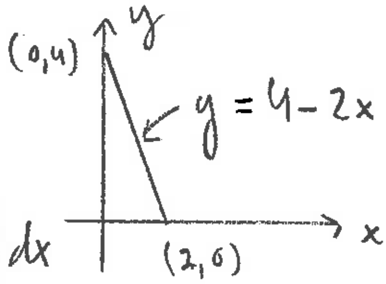
RATKAISUT $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$

$f(1,0) = \underline{\underline{5 = \text{MAX}}}$, $f(-1,0) = 1$

$f(0,1) = 2$, $f(0,-1) = \underline{\underline{-2 = \text{MIN}}}$

---

6. a) $\iint\limits_D (3x+6y)\,dA$



$= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} (3x+6y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\Big/_0^{4-2x} (3xy + 3y^2) \right) dx$

$= \int_0^2 \left(3x(4-2x) + 3(4-2x)^2 \right) dx = \int_0^2 (6x^2 - 36x + 48)\,dx = \Big/_0^2 (2x^3 - 18x^2 + 48x)$

$= \underline{\underline{40}}$

b) Muunnoksen Jacobin det on

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 13 = \text{VAKIO}$$

Tämä on pinta-alan suurennussuhde,

joten $A(D) = 13 \cdot A(\Omega) = \underline{\underline{13}}.$