

A?

Aalto-yliopisto

MS-A0204**Loppukoe, 16.02.2017 klo 09:00-12:00**

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

Tehtävä 1. *Astroidi on tasokäyrä, jonka parametriesitys on*

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t), \\ y(t) = \sin^3(t), \end{cases}$$

missä $t \in [0, 2\pi]$.

a) (2 p) Määritä astroidin tangenttivektori pisteessä $(x(t), y(t))$.

b) (4 p) Laske astroidin kehän pituus.

Tehtävä 2. *Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.*

a) (1 p) Määritä $\nabla f(1, -1, 2)$.

b) (2 p) Määritä funktion f muutosnopeus pisteessä $(1, -1, 2)$, kun pisteestä $(1, -1, 2)$ liikutaan pisteen $(3, 1, 1)$ suuntaan.

c) (3 p) Määritä pallopinnan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$ pisteeseen $(1, -1, 2)$ asetetun tangenttitason yhtälö.

Tehtävä 3. *Cobb-Douglas -malli valmistajan tuotannolle on*

$$f(x, y) = x^{3/4}y^{1/4},$$

missä parametrit x ja y ovat työvoima ja pääoma. Oletetaan, että työvoimakustannus yksikköä kohden on 20 (tuhatta euroa) ja pääomakustannus yksikköä kohden on 30 (tuhatta euroa). Oletetaan lisäksi, että tuotannon kokonaiskustannukset voivat olla enintään 120 (tuhatta euroa), eli

$$20x + 30y = 120.$$

Määritä tuotannon maksimitaso Lagrangen menetelmää käyttäen (6 p).

Tehtävä 4. *Olkoon D käyrien $y = \sqrt{x}$ ja $y = x^3$, missä $x \in [0, 1]$, rajoittama alue. Piirrä kuva alueesta D (1 p). Laske integraali*

$$\iint_D 4xy - y^3 dA$$

(5 p).