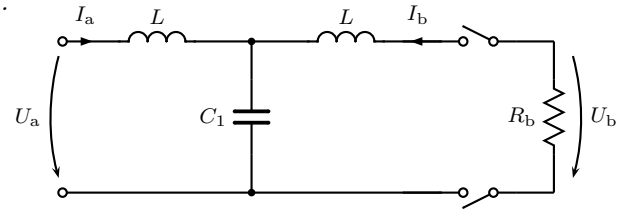
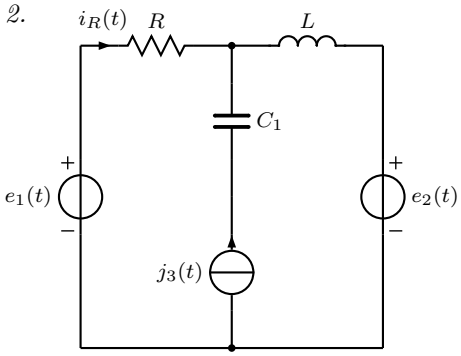
1.



Laske oheisen piirin ketjumatriisi sekä sen avulla syöttöpisteimpedanssi Z_a, kun kuormituksena on resistanssi R_b.

$$\omega = 10000\,\text{rad/s} \quad L = 5\ \text{mH} \quad C_1 = 1\ \mu\text{F}$$
$$R_b = 100\ \Omega.$$

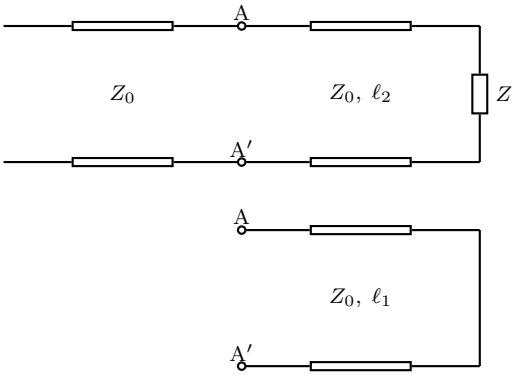
2.



Laske kuvan jatkuvuustilassa olevassa piirissä vastuksen virta $i_R(t)$ ajan funktiona sekä vastuksessa lämmöksi muuttuva teho P_R.

$$e_1(t) = 10\sin(\omega t)\,\text{V}$$
$$e_2(t) = 5\sin(\omega t + 30^\circ)\,\text{V}$$
$$j_3(t) = 2\sin(2\omega t + 60^\circ)\,\text{A}$$
$$\omega = 300\ \text{rad/s}$$
$$R = 5\ \Omega \quad L = 40\,\text{mH} \quad C = 20\,\text{mF}.$$

3.



Johto ($Z_0 = 50\,\Omega$) on päätetty impedanssilla $Z = (30 - \text{j}80)\,\Omega$. Kuorman sovittamiseksi liitetään johtoon oikosuljettu johdonpätkä ($Z_0 = 50\,\Omega$, pituus ℓ_1) etäisyydelle ℓ_2 kuormasta siten, että liitoskohdasta näkyvä kokonaisimpedanssi on ominaisimpedanssin Z_0 suuruinen. Laske

(a) etäisyys ℓ_2

(b) tarvittavan johdonpätkän pituus ℓ_1.

Jos käytit Smithin karttaa, palauta se osana vastaustasi.

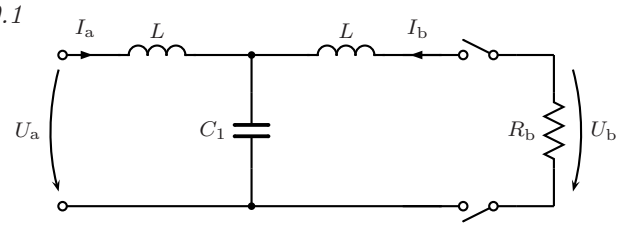
Laplace-muunnostaulukko

Määritelmä		
1.	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$

Laplace-muunnoksen ominaisuuksia		
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
2.	$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$	$A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$
3.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
4.	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
5.	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
6.	$(-t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s)$
7.	$f(t-a)\varepsilon(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
8.	$f(t+a)$	$e^{as}(F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t)\mathrm{d}t)$
9.	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
10.	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
11.	jaksollinen funktio $f(t) = f(t+T)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$, $F_1(s) =$ yhden jakson muunnos
12.	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
13.	$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	
14.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, jos loppuarvo on olemassa	

Muunnospareja		
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
15.	$\delta(t)$	1
16.	$a\varepsilon(t)$	$\frac{a}{s}$
17.	t	$\frac{1}{s^2}$
18.	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
19.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
20.	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
21.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
22.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
23.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
24.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
25.	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
26.	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
27.	$\frac{e^{-at}t^n}{n!}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
28.	$\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
29.	$[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\pi/\omega)]\sin(\omega t)$	$\left(1+e^{-\pi s/\omega}\right)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

0.1



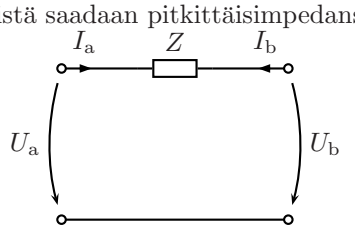
Laske oheisen piirin ketjumatriisi sekä sen avulla syöttöpisteimpedanssi Z_a, kun kuormituksena on resistanssi R_b.

$$\omega = 10000\,\mathrm{rad/s} \quad L = 5\ \mathrm{mH} \quad C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$$
$$R_b = 100\ \Omega.$$

Ketjuparametrien määrittely-yhtälöt:

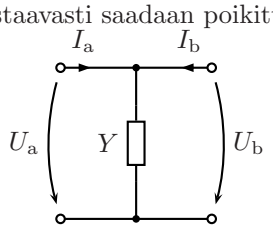
$$\begin{bmatrix} U_a \\ I_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ I_b \end{bmatrix} = \boldsymbol{K} \cdot \begin{bmatrix} U_b \\ I_b \end{bmatrix}$$

Näistä saadaan pitkittäisimpedanssille:



$$\begin{aligned} U_a &= U_b + ZI_b \\ I_a &= I_b \end{aligned} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vastaavasti saadaan poikittaisadmittanssille:



$$\begin{aligned} U_a &= U_b \\ I_a &= YU_b + I_b \end{aligned} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$

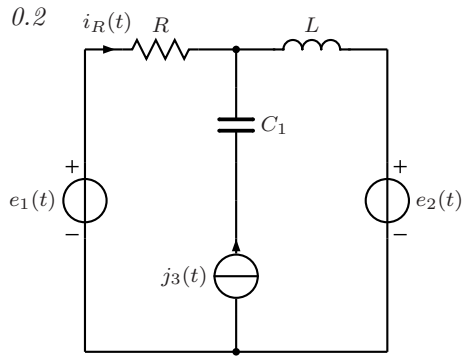
Koko piirin ketjumatriisi saadaan kertomalla eri osien ketjumatriisit keskenään.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j}\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{j}\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j}\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 C_1 L & \mathrm{j}\omega L(2-\omega^2 C_1 L) \\ \mathrm{j}\omega C_1 & 1-\omega^2 C_1 L \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}5 & \mathrm{j}75\,\Omega \\ \mathrm{j}10\,\mathrm{mS} & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tarkistus: Resiprookkiselle piirille pätee $AD - BC = 1$.
Kun piiri on päätetty resistanssilla R_b, pätee: $U_b = R_b I_b$. Saadaan:

$$Z_a = \frac{U_a}{I_a} = \frac{AU_b + BI_b}{CU_b + DI_b} = \frac{AR_bI_b + BI_b}{CR_bI_b + DI_b} = \frac{AR_b + B}{CR_b + D} = \frac{50 + \mathrm{j}75}{0{,}5 + \mathrm{j}1}\,\Omega = (80 - \mathrm{j}10)\,\Omega$$

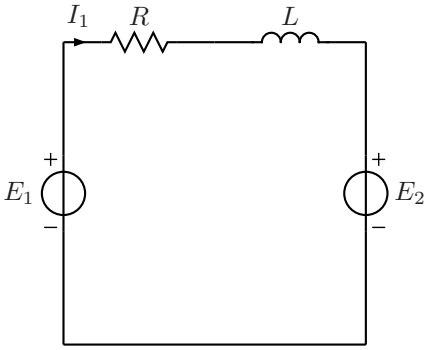
0.2



Laske kuvan jatkuvuustilassa olevassa piirissä vastuksen virta $i_R(t)$ ajan funktiona sekä vastuksessa lämmöksi muuttuva teho P_R.

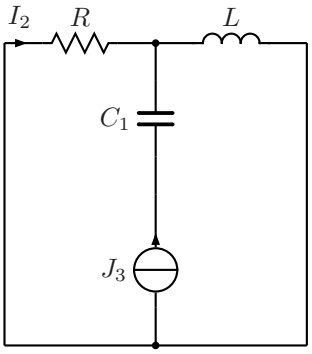
$$e_1(t) = 10\sin(\omega t)\,\mathrm{V}$$
$$e_2(t) = 5\sin(\omega t + 30^\circ)\,\mathrm{V}$$
$$j_3(t) = 2\sin(2\omega t + 60^\circ)\,\mathrm{A}$$
$$\omega = 300\ \mathrm{rad/s}$$
$$R = 5\ \Omega \quad L = 40\,\mathrm{mH} \quad C = 20\,\mathrm{mF}.$$

Käsitellään taajuudet erikseen.
Taajuudella ω piirissä vaikuttaa kaksi lähdettä.



$$E_1 = \frac{10}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}$$
$$E_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}\underline{/30^\circ}$$
$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R + \mathrm{j}\omega L} = 0{,}337\underline{/-91{,}17^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$i_1(t) = 0{,}477\sin(300t - 91{,}17^\circ)\,\mathrm{A}$$

Taajuudella 2ω:



$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{2}}\underline{/60^\circ}$$
$$I_2 = -\frac{\mathrm{j}2\omega L}{R + \mathrm{j}2\omega L}J_3 = 1{,}385\underline{/-108{,}23^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$i_2(t) = 1{,}958\sin(600t - 108{,}23^\circ)\,\mathrm{A}$$

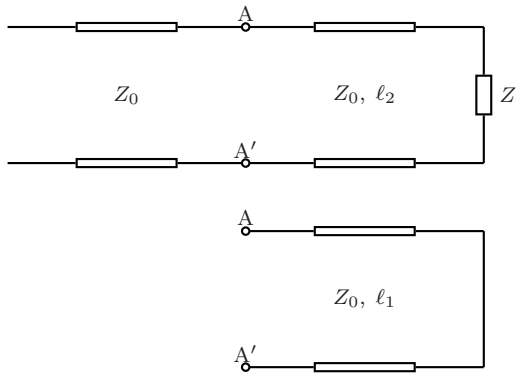
Kokonaisvirta:

$$i(t) = 0{,}477\sin(300t - 91{,}17^\circ) + 1{,}958\sin(600t - 108{,}23^\circ)\,\mathrm{A}$$

(Huomaa: $1{,}958\sin(600t - 108{,}23^\circ) = -1{,}958\sin(600t + 71{,}77^\circ)$. Joka taajudella täytyy valita virran suunta samaksi, jotta virtojen summaamisessa olisi mieltä.)
Kokonaisteho

$$P = R|I_1|^2 + R|I_2|^2 = 0{,}568\,\mathrm{W} + 9{,}584\,\mathrm{W} = 10{,}152\,\mathrm{W}$$

0.3



Johto ($Z_0 = 50\,\Omega$) on päätetty impedanssilla $Z = (30 - \mathrm{j}80)\,\Omega$. Kuorman sovittamiseksi liitetään johtoon oikosuljettu johdonpätkä ($Z_0 = 50\,\Omega$, pituus ℓ_1) etäisyydelle ℓ_2 kuormasta siten, että liitoskohdasta näkyvä kokonaisimpedanssi on ominaisimpedanssin Z_0 suuruinen. Laske

(a) etäisyys ℓ_2

(b) tarvittavan johdonpätkän pituus ℓ_1.

Johdon sovittamisessa pyritään siihen, että liitoskohdasta näkyvä kokonaisimpedanssi on johdon ominaisimpedanssin suuruinen. Reaaliosa sovitetaan johdolla 2 ja jäljelle jäänyt imaginaariosa kumotaan rinnankytketyllä johdolla 1 siten, että liitoskohdasta näkyvä normalisoitu impedanssi $z_{\mathrm{in}} = z_{\mathrm{in,re}} + z_{\mathrm{in,im}} = 1 + \mathrm{j}0$ eli liitoskohdan normalisoitu admittanssi $y_{\mathrm{in}} = y_{\mathrm{in,re}} + y_{\mathrm{in,im}} = 1 + \mathrm{j}0$

Normalisoidaan kuormaimpedanssi Z ja merkitään diagrammille:

$$z = Z/Z_0 = 0{,}6 - \mathrm{j}1{,}6$$

Koska sovitus tehdään rinnakkaisjohdolla, käytetään impedanssien sijasta admittansseja. Peilataan normalisoitu impedanssi keskipisteen kautta admittanssiksi.
Siirrytään generaattoriin päin, kunnes päästään pisteeseen, jossa $\Re\mathrm{e}\,\{y_{\mathrm{in2}}\} = 1{,}0$. Saadaan:

$$y_{\mathrm{in2}} \approx 1{,}0 + \mathrm{j}2{,}08 \qquad\qquad \Rightarrow \ell_2 = 0{,}189\lambda - 0{,}082\lambda = 0{,}107\lambda$$

Oikosulkua vastaavasta admittanssista $y_{\mathrm{k}} = \infty + \mathrm{j}\infty$ siirrytään generaattoriin päin, kunnes päästään pisteeseen, jossa $\Im\mathrm{m}\,\{y_{\mathrm{in1}}\} = -\Im\mathrm{m}\,\{y_{\mathrm{in2}}\}$. Saadaan:

$$y_{\mathrm{in1}} = 0 - \mathrm{j}2{,}08 \qquad\qquad \Rightarrow \ell_1 = 0{,}321\lambda - 0{,}25\lambda = 0{,}071\lambda$$