T-61.3040 Signaalien tilastollinen mallinnus

Tentti 25.4.2009

Tentissä saa olla mukana laskin (ei ohjelmoitava tai muisti tyhjä) ja matematiikan perustaulukot (ei taulukoita joissa on kurssin aiheisiin suoraan liittyvää materiaalia). Esimerkiksi Råde & Westergrenin kirja "BETA Mathematics Handbook for Science and Engineering" sisältää materiaalia, joka liittyy kurssin aiheisiin liian suoraan; näin ollen tuota kirjaa EI saa olla mukana tentissä.

Tentin tulokset ilmoitetaan aikanaan Noppa-järjestelmän kautta, ei siis enää uutisryhmässä opinnot.tik.informaatiotekniikka.

1. (max 6p)

Selitä *lyhyesti* seuraavat asiat menemättä tarpeettomasti yksityiskohtiin:

i) Wiener-suodin (2p)

ii) Periodogrammi (2p)

iii) Autokorrelaatioiden estimointimenetelmät (2p)

2. (max 6p)

Tarkastellaan reaaliarvoista satunnaisprosessia $x(n) = d(n) + v(n)$, missä $d(n)$ ja $v(n)$ ovat korreloimattomia ja nollakeskiarvoisia väljässä mielessä stationäärisiä prosesseja. Prosessin $d(n)$ autokorrelaatio on $r_d(k) = 3 \cdot (2/3)^{|k|}$. Kohinan autokorrelaatio on: $r_v(0) = 1$, $r_v(k) = 0$ kun $k \neq 0$.

i) Ratkaise optimaalinen Wiener-suodin $\hat{d}(n) = w(0)x(n) + w(1)x(n-1)$. Mikä on tällöin keskimääräinen neliöllinen virhe $\mathrm{E}(|e(n)|^2) = \mathrm{E}(|d(n) - \hat{d}(n)|^2)$? (3p)

ii) Ratkaise optimaalinen ei-kausaalinen IIR-Wiener-suodin z-tasossa esitettynä. (3p)

Vihje: jonon $r(k)$ z-muunnos on $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)z^{-k}$ ja geometrisen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ summa on $q/(1-q)$.

3. (max 6p)

Vastaa seuraaviin väitteisiin joko "tosi" tai "epätosi" tai jätä vastaamatta. Oikea vastaus antaa yhden pisteen, väärä -1 pistettä ja vastaamatta jättäminen nolla pistettä. Tästä tehtävästä saamasi kokonaispistemäärä ei kuitenkaan voi laskea negatiiviseksi; kokonaispistemäärä on vähintään nolla. Vastauksia ei tarvitse perustella.

a) Impulssit (piikit) WSS-prosessin tehospektrissä johtuvat ainoastaan kohinasta.

b) Ergodisuus liittyy aikakeskiarvon suppenemiseen kohti otoskeskiarvoa.

c) AR(2)-prosessi $x(n) = -1.1x(n-1) - 0.3x(n-2) + v(n)$, missä $v(n)$ on normaalijakautunutta valkoista kohinaa varianssilla 1, on väljässä mielessä stationäärinen.

d) Olkoon $v(n)$ valkoista kohinaa. Silloin prosessi $x(n) = v(n) + 0.5v(n-1)$ on myös valkoista kohinaa.

e) Pisarenkon menetelmä ja MUSIC perustuvat siihen, että autokorrelaatiomatriisin ominaisvektorit ovat signaalivektoreita eli muotoa $\mathbf{e} = [1, \exp(j\omega), \exp(j2\omega), \ldots, \exp(j(M-1)\omega)]^T$.

f) Nollakeskiarvoinen normaalijakautunut prosessi määräytyy täysin autokorrelaatioista.

4. (max 6p)

Olet mitannut seuraavat havainnot reaaliarvoisesta nollakeskiarvoisesta WSS-prosessista $x(n)$:

$x(0) = 1$, $x(1) = -1/2$, $x(2) = 1/3$, $x(3) = -1/3$, $x(4) = 1/2$, $x(5) = -1/3$

Haluat estimoida kaksikertoimisen lineaarisen ennustimen, joka hetkellä n ennustaa arvoa $x(n)$ arvoista $x(n-1)$,$x(n-2)$. Haluat käyttää LMS-algoritmia estimoimaan ennustimen.

i) Haluat, että LMS-algoritmi suppenee odotusarvon suhteen. Valitse askelpituus siten, että näin käy; estimoi tarvittavat tiedot ja tee mahdolliset tarvittavat oletukset (ilmoita oletuksesi). (2p)

ii) Aja LMS-algorithmia kahden päivitysaskeleen verran, lähtien hetkestä $n = 2$ ja kertoimista $\mathbf{w} = [1, 1]^T$, käyttäen kohdassa i) valitsemaasi askelpituutta. (2.5p)

iii) Oletetaan, että tunnetaan tälle prosessille optimaalisen AR(2)-mallin keskimääräinen neliöllinen ennustusvirhe (MSE); sen arvo on s_{min}.

Oletetaan, että olet ajanut LMS-algoritmia hyvin pitkään askelpituudella, joka on tuhannesosa kohdan i) askelpituudesta, ja oletetaan että LMS-algoritmi on supennut odotusarvon suhteen. Silti algoritmin saavuttama MSE on keskimäärin suurempi kuin s_{min}; selitä mistä tämä johtuu. Voitko vaikuttaa saavuttamaasi MSE:hen muuttamalla askelpituutta? Jos voit, miten pituuden muuttaminen vaikuttaa MSE:hen? Jos et, selitä miksi et. (1.5p)