Aalto-yliopisto

Gripenberg, Saari

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti ja välikokeiden uusinta 12.3.2014

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.
Tentin tehtävät ovat 5 tehtävää tehtävistä 2, 3, 4, 5, 6, 8.
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat
1. vk: 1–4
2. vk: 5–8

1. Funktion s Fourier-muunnos on $\hat{s}(\nu) = \mathrm{e}^{-\nu^4}$. Määritä funktioiden $g(t) = s(4t)$ ja $h(t) = s(t+4)$ Fourier-muunnokset.

2. Funktiosta s tiedetään, että sen Fourier-munnos on

$$\hat{s}(\nu) = \begin{cases} 2, & 1 \leq \nu \leq 3, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritä $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t$ ja $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,\mathrm{d}t$.

3. Diskreetti jono s on jaksollinen jaksolla 10 ja sen diskreetti Fourier-muunnos $\hat{\mathrm{s}}$ toteuttaa ehdot $\overline{\hat{\mathrm{s}}(j)} = \hat{\mathrm{s}}(10-j)$, $j = 0, 1, \ldots, 9$. Onko jono s reaalinen? Perustele ja muista että kompleksiluku z on reaalinen jos ja vain jos $\overline{z} = z$.

4. Funktio s on jatkuvasti derivoituva, jaksollinen jaksolla 1 ja sen Fourier-kertoimet ovat $\hat{s}(0) = 0$ ja $\hat{s}(k) = \frac{\mathrm{i}(-1)^k}{k^3}$ kun $k \neq 0$. Määritä s:n derivaatan s' Fourier-kertoimet.

5. Osoita, että jos $\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ ja $h(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g(t-j)$ kun $t \in \mathbb{R}$ niin jaksollisen funktion h Fourier-kerroin $\hat{h}(k)$ on jaksottoman funktion g Fourier-muunnoksen arvo pisteessä k.

6. Signaalista $s(t) = \sin(2\pi 7t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j \cdot 0.6)$, $j = 0, 1, \ldots, 3999$ ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j, $0 \leq j \leq 3999$, arvoilla luvut $|\hat{q}(j)|$ ovat suurimmillaan?

7. Oletetaan, että $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$ ja $\int_{\mathbb{R}} |w(t)|\,\mathrm{d}t^2 = 1$ ja että s:n ikkunoitu Fourier-muunnos ikkunafunktiolla w on $F(s,w)(\tau,\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t} s(t)\overline{w(t-\tau)}\,\mathrm{d}t$. Osoita, että

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(s,w)(\tau,\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu.$$

8. Oletetaan, että $\mathrm{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on sellainen, että $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mathrm{a}(j)| < \infty$. Määritellään vaimennettu distribuutio $h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\delta_j$ jolloin siis sen arvo testifunktiolla ψ on $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a(j)\psi(j)$. Määritä h:n Fourier-muunnos.