**T-106.4100 Algoritmien suunnittelu ja analyysi, syksy 2014**
**Tentti 19.2.2015** **Ei apuvälineitä eikä laskimia**

Kirjoita jokaisen palauttamasi paperin yläreunaan selvästi kurssin koodi ja nimi sekä tentin päivämäärä, nimesi, opiskelijanumerosi ja tutkinto-ohjelmasi sekä palauttamiesi paperien kokonaismäärä.

1. a) (3p) Mitkä seuraavista väittämistä pitävät paikkansa ja mitkä eivät? Perustele lyhyesti! (Lyhyt sanallinen perustelu riittää, tarkkoja matemaattisia todistuksia ei vaadita.)
   i. $n^3 + 6n^2 \log^2 n \in \Theta(n^3)$
   ii. $n + 2n \log\log n \in \Omega(n^2)$
   iii. $5n^2 + 8n \in O(n^3)$

   b) (3p) Verkon syvyyssuuntainen läpikäynti luokittelee verkon kaaret puukariin, eteneviin kaariin, takautuviin kaariin ja poikittaiskaariin. Mitä nämä neljä tarkoittavat?

2. a) (3p) Ratkaise seuraava rekursioyhtälö, kun $n$ on kahden potenssi. Anna täsmällinen ratkaisu (suuruusluokka ei riitä).

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 1 \\ 4T(n/2) + 4n^2 & \text{kun } n > 1 \end{cases}$$

   b) (3p) Ratkaise seuraava rekursioyhtälö, kun $n$ on kahden potenssi. Anna täsmällinen ratkaisu (suuruusluokka ei riitä). Vihje: Tee muuttujanvaihto.

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 2 \\ 4T(n/2) + n^2 \log n & \text{kun } n > 2 \end{cases}$$

3. a) (4p) Kerro, miten minimin poisto -operaatio suoritetaan toisaalta Binomikeossa ja toisaalta Fibonacci-keossa. Mitä eroja operaation suorittamisella näissä rakenteissa on ja mistä erot johtuvat? Mikä on minimin poiston pahimman tapauksen aikavaativuus kummassakin rakenteessa ja mikä on sen tasoitetttu aikavaativuus (amortized complexity) Fibonacci-keossa? Anna lyhyet perustelut näille aikavaativuuksille (tarkkoja matemaattisia johtoja ei tarvitse esittää).

   b) (2p) Kerro, miten tasoitettu aikavaativuus (engl. amortized complexity) eroaa keskimääräisestä aikavaativuudesta.

4. (6p.) Tarkastellaan suunnattua verkkoa $G = (V, E)$, jonka solmut ovat $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Määritellään, että verkko on *järjestetty verkko*, jos sen solmuille ja kaarille pätee seuraavat kaksi ehtoa:

   - Verkon kaikki kaaret ovat muotoa $(v_i, v_j)$ siten, että $i < j$. Toisin sanoen verkon kaikkien kaarten lähtösolmun indeksi on pienempi kuin tulosolmun indeksi. Verkon kaikkien tällaisten solmuparien välillä ei kuitenkaan välttämättä ole kaarta.
   - Verkon jokaisesta solmusta solmua $v_n$ lukuunottamatta lähtee vähintään yksi kaari. Toisin sanoen jokaiselle $v_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ on vähintään yksi kaari, joka on muotoa $(v_i, v_j)$.

   Laadi dynaamista ohjelmointia käyttävä algoritmi, joka etsii järjestetyssä verkossa $G$ pisimmän solmusta $v_1$ solmuun $v_n$ johtavan polun. Verkon kaarilla ei ole painoja, vaan polun pituudella tarkoitetaan polkuun kuuluvien kaarten määrää.

   Älä kirjoita algoritmisi koodia, vaan selitä algoritmisi periaate, esitä laskennassa käytettävät lausekkeet ja niiden arvojen laskentajärjestys sekä kerro, miten pisimmälle polulle kuuluvat solmut voidaan selvittää (pisimmän polun pituuden laskemisen lisäksi).

   Ratkaisusta ei saa täysiä pisteitä, jos se ei käytä dynaamista ohjelmointia.

5. (6p.) Verkko $G = (V, E)$ on kaksijakoinen, jos verkon solmut voidaan jakaa kahteen joukkoon $V_1$ ja $V_2$ siten, että minkään kahden samaan joukkoon kuuluvan solmun välillä ei ole kaarta. (Esimerkiksi jos $u \in V_1$ ja $v \in V_1$, niin $u$:n ja $v$:n välillä ei ole kaarta verkossa $G$.) Kirjoita pseudokoodi algoritmille joka tutkii, onko annettu suuntaamaton verkko kaksijakoinen. Algoritmin aikavaativuuden tulee olla $O(|V| + |E|)$.

   *Vinkki:* Suuntaamaton verkko on kaksijakoinen jos ja vain jos verkon solmut voidaan värittää käyttämällä vain kahta eri väriä niin, että kaikilla kaarilla $(u, v) \in E$ solmulla $u$ on eri väri kuin solmulla $v$.

Kaavoja paperin toisella puolella.

Summakaavoja:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n\,(n+1)}{2}\\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\\
\sum_{i=0}^{n} 2^i &= 2^{n+1}-1\\
\sum_{i=0}^{n} a^i &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\\
\sum_{i=0}^{n} i\,a^i &= \frac{n\,a^{n+2}-(n+1)\,a^{n+1}+a}{(a-1)^2}, \text{ jossa } a \neq 1
\end{aligned}
$$

Logaritmi:

$x_1 > x_2 \Rightarrow \log x_1 > \log x_2$

$\log x_1 = \log x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\log 1 = 0$

$\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2$

$\log x^b = b \log x$

$x_1^{\log x_2} = x_2^{\log x_1}$ $(\log x_2 \log x_1 = \log x_1 \log x_2)$