

MS-A0402 Diskreetin matematiikan perusteet
Tentti ja välikokeiden uusinta 6.5.2014

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.

Tentin tehtävät ovat 5 tehtävää tehtävistä 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Uusintavälikokeiden tehtävät ovat

- 1. vk: 1–4,
- 2. vk: 5–8.

1. Osoita induktiolla, että

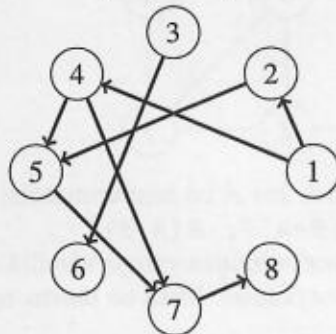
$$5 + 7 + 9 + 11 + \dots + (2n + 3) = \sum_{j=1}^n (2j + 3) = n^2 + 4n, \quad n \geq 1.$$

- 2.

- (a) Mitä tarkoittaa merkintä " $f \in O(n^3)$ kun $n \rightarrow \infty$ "?
- (b) Formuloi väite "Kaikilla kokonaisluvuilla x on olemassa kokonaisluku y siten, että jos $x:n$ ja $y:n$ tulo on pienempi kuin x niin $x:n$ ja $y:n$ tulo on suurempi kuin x " käyttäen $\forall, \exists, \rightarrow, \&, |, !, \in, <, >, \mathbb{Z}, \cdot, x$ ja y sekä tarvittaessa sulkumerkkejä (missä siis \mathbb{Z} on kokonaislukujen joukko, $\&$ on "ja", $|$ on "tai", $!$ on negaatio ja \cdot on kertolaskumerkki). Päteekö tämä väite? Perustele!

- 3.

- (a) Jos A on joukko, jossa on m alkioita ja B on joukko, jossa on n alkioita niin montako injektiota $f : A \rightarrow B$ on olemassa. Perustele!
- (b) Relaatio joukossa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ esitetään alla olevan suunnatun verkon avulla siten, että $[a, b]$ kuuluu relaatioon jos ja vain jos solmusta a on kaari solmuun b .



Mitkä kaaret olisi poistettava ja minkä solmujen välille olisi lisättävä kaari jotta tuloksena olisi relaatio, joka on funktio?

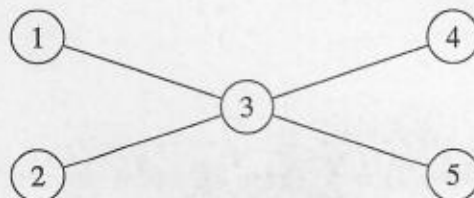
4. Kirjasto jakaa vanhojen kirjojen varastostaan 6 kirjaa 4:lle opiskelijalle. Monellako tavalla tämä on mahdollista tehdä jos

- (a) kirjat ovat erilaiset?
- (b) kirjat ovat identtiset?

Voit antaa vastauksesi niin että siinä on +, -, ·, / ja ! mutta ei esim. binomikertoimia.

5. Eräessä yliopistossa käytetään opiskelijanumeroita, jotka muodostetaan kahdeksasta numerosta ja tarkistuskirjaimesta. Opiskelija *A* kirjoitti opiskeiljanumeronsa muodossa $235x7247H$ missä numero x jäi suuttuisaksi. Määritä x käyttämällä hyväksi tietoa, että tarkistuskirjan *H* tarkoittaa, että kun luku, joka muodostuu tarkistuskirjasta edeltävistä numeroista jaetaan 23:lla niin jäännös on 8 ja että $[23507247]_{23} = [5]_{23}$, $[10000]_{23} = 18$ ja että $[18]_{23}^{-1} = [9]_{23}$.

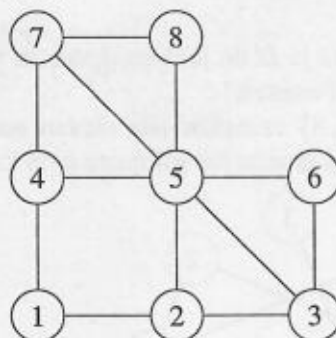
6. Alla olevan verkon



solmujoukon X permutaatiot (1) , $(1\ 5)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 5)$ and $(1\ 2)(4\ 5)$ muodostavat ryhmän G (mutta tätä sinun ei tarvitse osoittaa). Määritä sykli-indeksi $\zeta_{G,X}$ ja määritä sen avulla monellako tavalla verkon solmut voidaan värittää 2:lla värillä (kun kaksi väritystä pidetään samana jos toinen saadaan toisesta kiertämällä verkkoa 180 astetta tai peilaamalla verkkoa solmun 3 kulkevan pystysuoran tai vaakasuoran viivan suhteen).

7. Selitä miksei (suuntaamattomassa) yksinkertaisessa verkossa, jossa on kolme solmua, joilla on kolme naapurua ei ole olemassa Eulerin polkua (eli polkua, joka käy kaikkien kaarien läpi täsmälleen kerran).

8. Verkko $[V, E]$ on seuraavanlainen:



- (a) Määritä tämän verkon naapurimatriisi. Jos A on naapurimatriisi niin mikä informaatio saadaan matlab/octave-komennoilla $B=A^7$; $B(3, 5)$?
- (b) Määritä "ahneella algoritmilla" verkon solmujen väritys väreillä a, b, c, d, e, \dots kun solmut otetaan kasvavassa numerojärjestyksessä. Mikä on tämän verkon kromaattinen luku? Perustele!