AALTO-YLIOPISTON PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-C2105 Optimoinnin perusteet Harri Ehtamo / Markus Mattila

Tentti, 4.4.2017

Funktiolaskin sallittu, graafinen ei.

1. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + x_2 & & \\ \text{s.e.} & x_1 & \leq & 2 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Muuta lineaarinen tehtävä standardimuotoon. (1p)
b) Ratkaise tehtävä käyttäen taulukkomuotoista Simplex-menetelmää. (3p)
c) Hahmottele tehtävän käypä joukko ja esitä Simplex-algoritmin eteneminen. (2p)

2. Määrittele seuraavat käsitteet matemaattisesti (n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa).

a) Pisteen $\mathbf{x}$ kautta kulkeva vektorin $\mathbf{d}$ suuntainen suora (1p)
b) Pisteiden $\mathbf{x_1}$ ja $\mathbf{x_2}$ välinen jana (1p)
c) Konveksi joukko (1p)
d) Konveksi funktio (1p)
e) Taso (1p)
f) Pisteen $\mathbf{y} \notin S$ etäisyys kompaktista joukosta S (1p)

3. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{array}{lrcl} \min & (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2 & & \\ \text{s.e.} & x_1^2 + x_2^2 & \leq & 25 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

a) Ratkaise tehtävä graafisesti. Piirrä tehtävän käypä alue sekä kohdefunktion vakiokäyrät. (2p)
b) Osoita, että tehtävän välttämättömät KKT-ehdot toteutuvat optimipisteessä. (3p)
c) Mikä on tehtävän ratkaisu, jos kohdefunktiona on $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2$, mutta käypä joukko on sama? (1p)

4. Hunnikeisari Mukbar Attila suunnittelee sotaretkeä Eurooppaan. Hän on rajannut hyökkäysvaihtoehdot neljään kaupunkiin: Pariisi, Lontoo, Rooma ja Konstantinopoli. Käytettävissään M. Attilalla on 10 000 hunnin armeija.

Kunkin mahdollisen kohteen saalis (miljoonaa denaaria) sekä valtauksen vaatimat joukot löytyvät taulukosta 1.

Taulukko 1: Hyökkäyskohteiden tiedot

	Saalis	Vaaditut joukot
Pariisi	2 M	2500
Lontoo	1 M	1500
Rooma	5 M	5000
Konstantinopoli	4 M	3500

M. Attila ei halua levittää joukkojaan liian laajalle - siispä hän ei voi hyökätä sekä Lontooseen että Roomaan. Lisäksi taktisesti valveutunut hunnikeisari arvioi, että hän ei voi vallata Lontoota kukistamatta myös Pariisia.

a) Formuloi ongelma lineaarisena kokonaislukutehtävänä, kun M. Attila haluaa sotaretkeltään mukaan mahdollisimman suuren saaliin. Tehtävää ei tarvitse ratkaista. (4p)
b) Pohdiskeltuaan asiaa M. Attila haluaa saaliiksi vähintään 10 miljoonaa denaaria. Muodosta nyt M. Attilan ongelma tavoiteoptimointitehtävänä, kun hänelle yhtä tärkeitä ovat miljoonan denaarin tinkiminen tavoitteesta sekä 500 lisäsoturin värvääminen. Tehtävää ei tarvitse ratkaista. (2p)

5. a) Johda 1-ulotteinen sekanttimenetelmä lähtien esim. Newtonin menetelmästä. (2p)
b) Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mikä ehto $\mathbf{B}$:ltä pitää vaatia, jotta vektori $\mathbf{d} = -\mathbf{B}\nabla f(\mathbf{x})$ olisi laskusuunta pisteessä $\mathbf{x}$. Perustele. (2p)
c) Olkoon $\mathbf{d}_k = -\mathbf{B}_k \nabla f(\mathbf{x}_k)$ laskusuunta askeleella k. Kirjoita ehto, jonka $\mathbf{B}_k$:n pitää toteuttaa, jotta suunta $\mathbf{d}_k$ toimisi n-ulotteisen sekanttimenetelmän laskusuuntana. (2p)