

MS-A0203 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

J. Malinen

Välikokeiden uusinta ja tentti

6.5.2015

Välikoe 1: 1 – 3; Välikoe 2: 4 – 7; Molemmat välikokeet: 1 – 7;
Tentti: 2, 3, 4, 6, 7.

Laskimet ja taulukot ehdottomasti kiellettyjä.

1. Laske spiraalinpätkän

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cos t, \\ y(t) = e^{-t} \sin t, \end{cases}$$

kaarrenpituus, jossa parametri $t \in [0, \tau]$. Mitä tapahtuu kun $\tau \rightarrow \infty$?

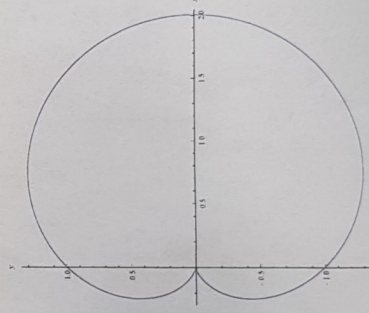
2. Laske raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{3x^2(y-1)^2}{2x^4 + 2(y-1)^4}$$

mikäli se on olemassa, tai perustele miksi raja-arvoa annettussa pisteessä ei ole olemassa.

3. Määritä pinnan $x^3 + 3x^2y + y^2 + \sin z = 11$ normaalivektori pisteessä $(1, 2, 0)$.

4. Laske napakoordinaatissa annettun kardioidin $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pinta-ala.



Kuva 1: Kardioidi.

(Vihje: $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$.)

KÄÄNNÄ!

5. Alueen D painopisteen y -koordinaatti saadaan laskettua kaavasta

$$m_y = \frac{1}{A} \iint_D y \, dA,$$

jossa A on alueen D pinta-ala. Etsi napakoordinaateissa annettun puoliympyrän $r = 1$, $\theta \in [0, \pi]$ ja x -akselin rajaaman alueen painopiste. Piirrä kuva.

Vihje: Integraali on helpointa laskea napakoordinaateissa.

6. Anna funktion $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $(x, y) = (2, 0)$. Käytä tätä hyväksi laskeaksesi funktion likiarvo pisteessä $(2.2, -0.2)$.
7. Suorakulmaisen särmiön yksi kärki on origossa ja siitä lähtevät kolme särmää sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Lisäksi origon vastainen kärki sijaitsee tasolla $x + 2y + 3z = 12$ alueessa $x, y, z \geq 0$. Määritä särmiön suurin mahdollinen tilavuus.

KÄÄNNÄ!