Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0203 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Tentti 8.12.2015

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

1. Määritä pinnan $x^4 + 3x^2y + 2y^2 + z = 15$ normaalivektori pisteessä $(1, 2, 0)$.

   $n = \left(\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y)\right) i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)\right) j + \frac{\partial f}{\partial z} f(x,y)$

2. Ympyräkartion pohjan säde on r ja korkeus h, jolloin sen tilavuus on $V(r, h) = \pi r^2 h/3$.

   $V(r,h) = f(x,y) = \frac{\pi x^2 y}{3}$

   a) Laske funktion V kaikki 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatat.
   b) Arvioi differentiaalin avulla tilavuuden suhteellista virhettä $|\Delta V|/V$, kun $r = 1 \pm 0{,}2$ ja $h = 2 \pm 0{,}1$.
   Huom: Sovitaan, että b-kohdassa (ilman laskinta) $\pi \approx 3$.

3. Määritä funktion $f(x, y, z) = 8x - 4y + 2z$ suurin ja pienin arvo pallopinnalla $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.

4. Piirrä kuvio tasojoukosta $D = \{(x, y) \mid -x \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 2\}$. Laske sen pinta-ala A ja keskiön x-koordinaatti

$$\overline{x} = \frac{1}{A} \iint_D x \, dA.$$

5. a) Satunnaismuuttujan X arvo on yksikkökiekosta

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

satunnaisesti valitun (ts. tiheysfunktio = vakio = $1/A$) pisteen etäisyys origosta. Laske sen odotusarvo

$$EX = \frac{1}{A} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA.$$

b) Laske kappaleen

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 8xy\}$$

tilavuus. Kääntöpuolella kappaleen yläreunan kuvaaja.

> plot3d(8·x·y, x=0..1, y=0..x)