

A?

Aalto-yliopisto

To 26.10.17 klo 09:00-12:00

Merkitse vastauspaperiin kurssikoodi / MOOC ja oletko suorittamassa kurssikoetta (KT) vai tenttiä (T0).

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

Tehtävä 1: Vastaa seuraaviin tosi/epätosi-väitteisiin. Oikeasta vastauksesta saa 1p, väärästä menettää 0.5p. Jos olet epävarma, voit vastata myös "mahdollisesti tosi/epätosi", jolloin oikeasta vastauksesta saa 0.5p, mutta väärästä vastauksesta ei menetä pisteitä. Vastaamalla "en osaa sanoa" saa 0.25p. Kokonaispisteet pyöristetään lopuksi kokonaisluvuksi välille 0-6.

- Kaikilla vektoreilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ja skaalareilla $a \in \mathbb{R}$ pätee, että jos $a\mathbf{x} = a\mathbf{y}$, niin $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Jos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -1$, niin \mathbf{v} ja \mathbf{w} ovat vastakkaissuuntaiset.
- Jos A, B ja AB on symmetrisiä, niin $AB = BA$.
- Jos $\lambda = 0$ on neliömatriisin A ominaisarvo, niin A on kääntyvä.
- Jos neliömatriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ainakin kaksi eri ratkaisua, niin sillä on ääretön määrä ratkaisuja.
- Jos kaikki matriisin A alkiot ovat nollia ja ykkösiä, niin $\det(A) = 1, 0$ tai -1 .

Tehtävä 2: Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [4 \ 3 \ 5] \text{ ja } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Laske seuraavien matriisilausekkeiden arvo, jos mahdollista. Jos laskutoimitusta ei ole määritetty, merkitse se vastaukseesi.

- $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}$
- \mathbf{cd}
- BA
- $A + B^T$
- $A^T B^T$
- $\mathbf{cBd} + \mathbf{d}^T \mathbf{d}$

Tehtävä 3: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & -5 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -14 \end{bmatrix}$.

- a) Muodosta matriisin A LU-hajotelma.
b) Ratkaise yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ yhtälöiden $L\mathbf{z} = \mathbf{y}$ ja $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ avulla.

Tehtävä 4: a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ 2 & a & 0 \\ 4 & a & a \end{bmatrix}$ Laske matriisin A determinantti ja anna esimerkki vakion a arvosta, jolla matriisi A ei ole kääntyvä.

b) Olkoon $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Anna esimerkki vektorista \mathbf{c} , jolla yhtälö $B\mathbf{y} = \mathbf{c}$

- i) on ratkeava
ii) ei ole ratkeava

Tehtävä 5: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 14 & 24 \\ -8 & -14 \end{bmatrix}$.

- a) Diagonalisoi matriisi A . Anna karakteristinen polynomi ja matriisit V , Λ ja V^{-1} siten, että $A = V\Lambda V^{-1}$.
b) Laske A^{25} matriisin Λ^{25} avulla. Vastauksiin saa jäädä potensseja.