Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, Perustieteiden korkeakoulu
Kinnunen

MS-C.1350 Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Loppukoe 26.10.2017 kello 13:00-16:00

Tämä tehtäväsarja on vain syksyn 2017 kurssin osallistujille. Tämä loppukoe vaikuttaa 50 prosenttia kurssin arvosteluun, toinen 50 prosenttia tulee laskuharjoituksista ja ennakkotehtävistä. Jos haluat suorittaa koko kurssin loppukokeella, niin pyydä toinen tehtäväpaperi valvojalta.

Kokeessa on viisi tehtävää kolmella sivulla.

1. Tässä tehtävässä tarkastellaan Dirichletin ongelman

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in B(0,1), \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial B(0,1), \end{cases}$$

ratkaisua muuttujien separoinnin avulla tason yksikkökiekossa $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia. Pelkkä vastaus riittää.

   (a) Ongelmalle etsitään erikosratkaisuja ratkaisua muodossa $A(x)B(y)$. ✓

   (b) Ongelmalle etsitään erikoisratkaisuja ratkaisua muodossa $A(\theta)B(r)$, missä r ja θ ovat tason pisteen napakoordinaattiesitys.

   (c) Laplacen yhtälö palautuu kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi.

   (d) Kaikki erikoisratkaisut ovat käyttökelposia ongelman ratkaisemissa. ✓

   (e) Ongelman ratkaisu saadaan erikoisratkaisujen linaarikombinaationa.

   (f) Lineaarikombinaation kertoimet määräytyvät reuna-arvon Fourierin kertoimista.

2. Perustele lyhyesti, miksi seuraavat väitteet ovat tosia. Lyhyt sanallinen vastaus riittää. Tehtävässä esiintyvien funktioiden oletetaan olevan sellaisia, että kaavat ovat hyvin määriteltyjä.

(a) Jos $\Delta u_1(x) = 0$ ja $\Delta u_2(x) = 0$, $x \in \Omega$, niin

$$u(x) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

on yhtälön $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$, ratkaisu.

(b) Jos

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u_1(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} -\Delta u_2(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u_2(x) = g(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

niin $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ on ongelman

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

ratkaisu.

(c) Jos

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u_1(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \Delta u_2(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u_2(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

niin $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ on ongelman

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ratkaisu.

(d) Funktio $u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy$ on ongelman

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ratkaisu.

(e) Funktio $u(x,t;s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy$ on ongelman

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t;s) - \Delta u(x,t;s) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > s, \\ u(x,s;s) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ratkaisu, kun $s > 0$.

(f) Funktio $u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,ds$ on ongelman

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ratkaisu.

3. (a) Muotoile täsmällisesti Laplacen yhtälön Dirichletin ongelma ylemmässä puoliavaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\}$.

   (b) Selosta, miten tämä ongelma ratkaistaan Fourierin muunnoksen avulla. Pelkkä päävaiheiden lyhyt sanallinen kuvailu riittää.

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko ja $T > 0$. Merkitään

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T) \quad \text{ja} \quad \Gamma_T = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).$$

Oletetaan, että u, $v \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ ovat lämpöyhtälön ratkaisuja joukossa Ω_T.

   (a) Muotoile maksimiperiaate lämpöyhtälölle joukossa Ω_T. Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, maksimiperiaatetta ei tarvitse todistaa.

   (b) Todista stabiilisuustulos: Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $|u - v| \leq \varepsilon$ parabolisella reunalla Γ_T, niin $|u - v| \leq \varepsilon$ joukossa Ω_T.

5. Oletetaan, että $c > 0$ on reaalinen vakio ja että $u = u(x,t)$ on aaltoyhtälön $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ ratkaisu.

   (a) Näytä, että funktio $v(x,t) = u(x, \frac{t}{c})$ on yhtälön $v_{tt} - \Delta v = 0$ ratkaisu.

   (b) Anna ratkaisukaava ongelmalle

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \quad \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u = g \quad \text{ja} \quad u_t = h \quad \text{joukossa} \quad \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

   Ohje: Kirchhoffin kaava yhtälölle $v_{tt} - \Delta v = 0$ dimensiossa kolme on

$$v(x,t) = \frac{1}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x))\,dS(y),$$

   $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.