MS-C2111 Stokastiset prosessit
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Tentti
23.10.2017, 13:00–16:00
K Kytölä & A Karrila

Tentissä on 4 tehtävää, kukin arvoltaan 6 pistettä. Tentissä saa käyttää ylioppilastutkintolautakunnan hyväksymää **laskinta** ja A4-kokoista **muistiinpanolappua**. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolappua ei tarvitse palauttaa.

Vuoden 2017 kurssin harjoituksista kertyneet bonuspisteet (0–6) lisätään tentin kokonaispistemäärään. Erityisesti harjoituksista maksimihyvityksen saaneen opiskelijan riittää periaatteessa ratkaista vain valitsemansa kolme tenttitehtävää kurssin maksimipisteiden saamiseksi.

1. Tarkastellaan diskreettiaikaista Markov-ketjua tilajoukolla $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisilla

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

   (a) Piirrä Markov-ketjun siirtymäkaavio. **(1 p)**

   (b) Onko Markov-ketjulla yksikäsitteinen tasapainojakauma? **(1 p)**

   (c) Jos Markov ketju tällä hetkellä on tilassa 3, niin millä todennäköisyydellä se on tilassa 6 kolmen aika-askeleen kuluttua? **(2 p)**

   (d) Millä todennäköisyydellä tilasta 1 käynnistyvä Markov-ketju ei koskaan käy tilassa 6? **(2 p)**

2. Yrityksellä on kolme serveriä, joista kukin voi olla annetulla hetkellä toiminnassa tai epäkunnossa. Oletetaan, että kukin toiminnassa oleva serveri toimii keskimäärin 45 vuorokautta ennen epäkuntoon menemistä, ja kukin epäkunnossa oleva serveri saadaan korjattua toimintaan keskimäärin 3 vuorokaudessa. Oletetaan lisäksi, että toiminta- ja korjausajat ovat eksponenttijakautuneita ja riippumattomia (esimerkiksi koska kullakin serverillä on oma ylläpitotiiminsä).

   (a) Mallinna toimivien serverien lukumäärää jatkuvan aikavälin Markov-prosessina $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ tilajoukolla $S = \{0,1,2,3\}$ (mahdolliset toimivien serverien lukumäärät). Mitkä ovat tämän prosessin hyppyvauhdit eli hyppyintensiteetit eri tilojen välillä? Piirrä prosessin siirtymäkaavio ja merkitse siihen vastaavat hyppyvauhdit. **(2 p)**

   (b) Perjantaina 13. lokakuuta mikään kolmesta serveristä ei toimi. Kuinka pitkään odotusarvoisesti kestää että ainakin yksi servereistä saadaan korjattua? **(2 p)**

   (c) Eräänä kauniina päivänä vain yksi servereistä toimii. Mikä on todennäköisyys, että jompikumpi epäkunnossa olevista servereistä ehditään korjata ennen kuin ainoa vielä toimiva serveri menee epäkuntoon? **(2 p)**

3. Oletetaan, että satunnaisluku X noudattaa geometrista jakaumaa parametrilla $q \in (0,1)$, eli sen pistetodennäköisyydet ovat

$$\mathbb{P}[X = k] = q\,(1-q)^k, \qquad \text{kun } k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}.$$

(a) Laske sievennetty lauseke satunnaisluvun X todennäköisyysgeneroivalle funktiolle $\phi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\,\mathbb{P}[X = k]$. **(2 p)**

(b) Laske odotusarvo $\mathbb{E}[X]$. **(2 p)**

(c) Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia satunnaislukuja, jotka noudattavat geometrista jakaumaa parametreilla q_1 ja q_2. Noudattaako summa $X_1 + X_2$ geometrista jakaumaa ja jos noudattaa, millä parametrilla? **(2 p)**

4. Pelaaja osallistuu kierroksittain pelattavaan uhkapeliin. Kierrosten tulokset

$$B_t = \begin{cases} 1 & \text{jos pelaaja voittaa kierroksella } t \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}, \qquad t \in \{1,2,\ldots\},$$

ovat riippumattomat ja voiton todennäköisyys on kaikilla kierroksilla sama

$$\mathbb{P}\Big[B_t = 1\Big] = p.$$

Kierrokselle $t \in \{1,2,\ldots\}$ pelaaja panostaa H_t pelimerkkiä. Pelaajan voittaessa kasino maksaa hänelle c-kertaisesti tämän määrän pelimerkkejä. Kun pelaajalla on aloittaessaan $X_0 = 20$ pelimerkkiä, on pelimerkkien määrä kierroksen t jälkeen näinollen

$$X_t = 20 + \sum_{s=1}^{t} \Big(c\,B_s - 1\Big)\,H_s.$$

Tarkastellaan prosessia $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ erilaisilla voiton todennäköisyyksillä $p \in [0,1]$, erilaisilla voittokertoimilla $c \geq 1$ ja erilaisilla panostusstrategioilla $(H_t)_{t\in\{1,2,\ldots\}}$. Allaolevien kohtien (a), (b), (c) tapauksissa vastaa seuraaviin kysymyksiin:

- Onko $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ martingaali? Perustele lyhyesti.
- Onko $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ Markov-ketju ja jos on, mitkä ovat sen siirtymätodennäköisyydet? Tarkkoja perusteluja ei tarvitse esittää.

(a) $$H_t = \begin{cases} 1 & \text{jos } X_{t-1} > 0 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}, \qquad p = \frac{1}{2}, \qquad c = 2.$$ **(2 p)**

(b) $$H_t = \begin{cases} 1 & \text{jos } X_{t-1} > 0 \text{ ja } t \leq 49 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases} \qquad p = \frac{1}{6}, \qquad c = 6.$$ **(2 p)**

(c) $$H_t = \begin{cases} X_{t-1} & \text{jos } 0 < X_{t-1} \leq 100 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}, \qquad p = \frac{18}{37}, \qquad c = 2.$$ **(2 p)**

MS-C2111 Stochastic processes
Department of Mathematics and Systems Analysis
Aalto University

Exam
23.10.2017, 13:00–16:00
K Kytölä & A Karrila

The exam consists of 4 problems, each worth 6 points. You are allowed to use a **calculator** approved by the Finnish Matriculation Examination Board and a handwritten **memory aid sheet** of size A4 with text only on one side and with your name and student number in the upper right corner. You don't need to return your memory aid sheet.

Bonus points (0–6) earned in the exercises of the 2017 course are added to the exam score. In particular, for a student who has earned full bonus points in the exercises, it suffices to solve only three problems of his/her choice in the exam to achieve the maximum course score.

1. Consider a discrete time Markov chain on the state space $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ and with the transition matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

   (a) Draw the transition diagram of the Markov chain. **(1 p)**
   (b) Does the Markov chain have a unique stationary distribution? **(1 p)**
   (c) If the Markov chain is currently in state 3, what is the probability that it will be in state 6 after three time steps? **(2 p)**
   (d) What is the probability that the Markov chain started from state 1 never visits state 6? **(2 p)**

2. A company has three web servers, each of which can be either operational or crashed at any given instant of time. Assume that an operational server keeps functioning on average 45 days without crashing, and the oparationality of each crashed server can be recovered by maintenance in 3 days on average. Assume furthermore, that the crash times and recovery times are exponentially distributed and independent (for instance because of a separate maintenance team for each server).

   (a) Model the number of operational servers by a continuous time Markov process $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ on the state space $S = \{0,1,2,3\}$ (the possible numbers of operational servers). What are the jump rates (jump intensities) between different states? Draw the transition diagram of the process, with the jump rates indicated. **(2 p)**
   (b) On Friday, October 13, none of the three servers are operational. In expectation, how long does it take to recover at least one server? **(2 p)**
   (c) One fine day only one of the servers is operational. What is the probability that one of the two crashed servers can be recovered before the last remaining operational server crashes? **(2 p)**

3. Assume that a random number X follows the geometric distribution with parameter $q \in (0,1)$, i.e., with probability mass function

$$\mathbb{P}\big[X = k\big] = q\,(1-q)^k, \qquad \text{for } k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}.$$

(a) Calculate a simplified expression for the probability generating function of X, $\phi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\, \mathbb{P}\big[X = k\big]$. **(2 p)**

(b) Calculate the expected value $\mathbb{E}\big[X\big]$. **(2 p)**

(c) Assume that X_1 and X_2 are independent random numbers which follow geometric distributions with respective parameters q_1 and q_2. Does the sum $X_1 + X_2$ follow a geometric distribution, and if it does, with what parameter value? **(2 p)**

4. A player gambles in successive rounds of a game. The results of the rounds

$$B_t = \begin{cases} 1 & \text{if the player wins on round } t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad t \in \{1,2,\ldots\},$$

are independent, and the probability of winning is the same for each round

$$\mathbb{P}\Big[B_t = 1\Big] = p.$$

On round $t \in \{1,2,\ldots\}$ the player places a bet of H_t tokens. If the player wins, the casino returns c times that number of tokens to her. When the player starts with $X_0 = 20$ tokens, her number of tokens after t rounds is thus

$$X_t = 20 + \sum_{s=1}^{t} \Big(c\,B_s - 1\Big)\,H_s.$$

Consider the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ with various winning probabilities $p \in [0,1]$, various return odds $c \geq 1$, and various betting strategies $(H_t)_{t\in\{1,2,\ldots\}}$. In the cases (a), (b), (c) below, answer the following questions:

- Is the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ a martingale? Give brief justifications.
- Is the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ a Markov chain, and if it is, what are its transition probabilities? You do not need to give careful justifications.

(a) $$H_t = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{t-1} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad p = \frac{1}{2}, \qquad c = 2.$$ **(2 p)**

(b) $$H_t = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{t-1} > 0 \text{ and } t \leq 49 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad p = \frac{1}{6}, \qquad c = 6.$$ **(2 p)**

(c) $$H_t = \begin{cases} X_{t-1} & \text{if } 0 < X_{t-1} \leq 100 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad p = \frac{18}{37}, \qquad c = 2.$$ **(2 p)**

MS-C2111 Stokastiska processer
Department of Mathematics and Systems Analysis
Aalto-universitetet

Tenta
23.10.2017, 13:00–16:00
K Kytölä & A Karrila

Denna tenta består av 4 uppgifter, var och en värd 6 poäng. Man får använda sig av en **miniräknare** av en typ godkänd av studentexamensnämnden, och en A4-storleks pappersark av egna **anteckningar**. Anteckningarna skall vara handskrivna och text skall finnas på endast en sida av arken, med namn och studentnummer angivna i det högra övre hörnet av arken. Man behöver inte lämna in anteckningarna med provsvaren.

Bonuspoäng (0–6) från höstens 2017 räkneövningar tilläggs till tentpoängen. I synnerhet för en student som fått maximala bonuspoäng räcker det för det maximala vitsordet att lösa tre uppgifter av eget val.

1. Låt oss betrakta en Markov-kedja i diskret tid på tillståndsrummet $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och med övergångsmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Rita Markov-kedjans övergångsgraf. **(1 p)**

(b) Har kedjan en entydig stationär fördelning? **(1 p)**

(c) Om Markov-kedjan befinner sig för tillfället i tillstånd 3, vad är sannolikheten att den tre tidssteg senare är i tillstånd 6? **(2 p)**

(d) Vad är sannolikheten att Markov-kedjan börjad från tillstånd 1 aldrig besöker tillstånd 6? **(2 p)**

2. Ett företag upprätthåller tre servrar, av vilka var och en vid given tidspunkt kan fungera eller vara trasig. Låt oss anta att varje server fungerar i snitt i 45 dygn innan den går sönder, och att reparationen av en trasig server tar i snitt 3 dygn. Låt oss därtill anta att tiden under vilken servrarna fungerar eller repareras är exponentialfördelad och dessa tider är oberoende av varandra (t. ex. för varje server har sitt service team).

(a) Modellera antalet fungerande servrar som en Markov-kedja $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ i kontinuerlig tid på tillståndsrummet $\{0, 1, 2, 3\}$ (där talen beskriver antalet trasiga servrar). Vilka är kedjans övergångsintensiteter mellan de olika tillstånden? Rita övergångsgrafen och ange de motsvarande intensiteteterna i grafen. **(2 p)**

(b) På fredagen den 13 oktober är alla servrar trasiga. Hur lång tid tar det i snitt tills åtminstone en av servrarna fungerar igen? **(2 p)**

(c) En vacker dag fungerar endast en av servrarna. Vad är sannolikheten att någondera trasiga servern hinner repareras innan den enda fungerande servern går sönder? **(2 p)**

3. Låt oss anta att slumptalet X är geometriskt fördelat med parameter $q \in (0,1)$, d.v.s. sannolikheterna för X ges av

$$\mathbb{P}\big[X = k\big] = q\,(1-q)^k, \qquad \text{för } k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}\,.$$

(a) Beräkna den sannolikhetsgenererande funktionen $\phi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\,\mathbb{P}\big[X = k\big]$ i utvecklad form. **(2 p)**

(b) Räkna medelvärdet $\mathbb{E}\big[X\big]$. **(2 p)**

(c) Låt oss anta att X_1 och X_2 är oberoende slumptal och geometriskt fördelade med parametrar q_1 respektive q_2. Är summan $X_1 + X_2$ också geometriskt fördelad och om den är, med vilken parameter? **(2 p)**

4. En spelare deltar i ett riskspel som spelas i givar. Resultaten av givarna betecknas med

$$B_t = \begin{cases} 1 & \text{om spelaren vinner vid giv } t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \qquad t \in \{1,2,\ldots\}\,,$$

Resultaten av olika givar antas vara oberoende och sannolikheten av en vinst är i alla givar densamma

$$\mathbb{P}\Big[B_t = 1\Big] = p.$$

Vid giv t satsar spelaren H_t spelmärken. I fall av seger betalas han c-falt tillbaka av kasinot. Om spelaren har i början $X_0 = 20$ spelmärken är alltså antalet spelmärken efter t givar

$$X_t = 20 + \sum_{s=1}^{t} \Big(c\,B_s - 1\Big) H_s.$$

Låt oss betrakta den stokastiska processen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ med olika vinstsannolikheter $p \in [0,1]$, olika vinstkoefficienter c och olika satsningsstragier (H_t), $t \in \{1,2,3,\ldots\}$. Besvara följande frågor i de nedan beskrivna fallen (a), (b) och (c):

- Är processen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ en martingal? Motivera kort ditt svar.
- Är processen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ en Markov-kedja, och om den är, vilka är dess övergångssannolikheter? Du behöver inte ge noggranna motiveringar i denna punkt.

(a) $H_t = \begin{cases} 1 & \text{om } X_{t-1} > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \qquad p = \frac{1}{2}, \qquad c = 2.$ **(2 p)**

(b) $H_t = \begin{cases} 1 & \text{om } X_{t-1} > 0 \text{ och } t \le 49 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad p = \frac{1}{6}, \qquad c = 6.$ **(2 p)**

(c) $H_t = \begin{cases} X_{t-1} & \text{om } 0 < X_{t-1} \le 100 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \qquad p = \frac{18}{37}, \qquad c = 2.$ **(2 p)**