

Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

1. Tiedetään, että $\widehat{r} = r$, kun $r(t) = e^{-\pi t^2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Laske tämän tiedon avulla Fourier-muunnos \widehat{s} , kun

$$s(t) = t^2 e^{-\pi t^2}.$$

Sievennä tulos reaalisiksi!

(Vihje: $r''(t) = \dots$ ja $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 e^{+i2\pi t \cdot \nu} = \dots$)

2. Mitä tarkoittaa, että "Fourier-muunnos säilyttää energian"? Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ energia, missä

$$s(t) = \int_0^1 e^{i\pi t \alpha} e^{-\alpha} d\alpha.$$

(Vihje: Energian säilyminen voi helpottaa tässä.)

3. Kun $0 < r < 1$, Poisson-ydin $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ on $P_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{i2\pi t \cdot k}$.

a) Laske \widehat{P}_r .

b) Näytä, että $P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi t)}$.

4. Laske 4-periodisen digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $r = \widehat{s}$, kun

$$s(0) = 2, \quad s(1) = 1, \quad s(2) = 0, \quad s(3) = 1.$$

Laske myös $\widehat{r} = \widehat{\widehat{s}}$ ja energia $\|\widehat{r}\|^2$.
Sievennä tulokset reaalisiksi!

Svensk översättning på andra sidan!

Poäng också för goda försök! **Kalkylator och litteratur är förbjudna.**

Denna gång får du använda Fourier-invers formel.

1. Vi vet att $\widehat{\widehat{r}} = r$, när $r(t) = e^{-\pi t^2}$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Räkna Fourier-transformen \widehat{s} , där

$$s(t) = t^2 e^{-\pi t^2}.$$

Skriv ditt svar som en reell funktion!

(Tips: $r''(t) = \dots$ och $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 e^{+i2\pi t \cdot \nu} = \dots$)

2. Vad menar man med att "Fourier-transformen bevarar energin"? Beräkna energin av signalen $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, där

$$s(t) = \int_0^1 e^{i\pi t \cdot \alpha} e^{-\alpha} d\alpha.$$

(Tips: Bevarandet av energin kan vara till hjälp här.)

3. När $0 < r < 1$, Poisson-kärnan $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ är

$$P_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{i2\pi t \cdot k}.$$

a) Beräkna $\widehat{P_r}$.

b) Visa, att $P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(2\pi t)}$.

4. Räkna den diskreta Fourier-transformen $r = \widehat{s}$ av den 4-periodiska digitala signalen $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, där

$$s(0) = 2, \quad s(1) = 1, \quad s(2) = 0, \quad s(3) = 1.$$

Räkna också $\widehat{\widehat{r}} = \widehat{s}$ och energin $\|\widehat{r}\|^2$.

Skriv dina svar som reella funktioner!

Tehtävät **suomeksi** paperin toisella puolen!