MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Heikkinen/Vesanen

Kokeessa saa käyttää laskinta. Sivun kääntöpuolelta löydät tarpeellisia kaavoja.

Tentti 26.10.2017

1. Laske integraali

$$\iiint_D yz\,dV,$$

kun D on epäyhtälöiden $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $y \leq 0$, $z \leq 0$ määräämä alue.

2. a) Onko vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2e^{2x}\sin(3y)\mathbf{i} + (3e^{2x}\cos(3y) + z^3)\mathbf{j} + 3yz^3\mathbf{k}$$

konservatiivinen?

b) Olkoon C sykloidikäyrä, jolla on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j},$$

$0 \leq t \leq 2\pi$. Laske C:n pituus.

3. Olkoon $\mathcal{S}$ pinta, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{2}\,uv\,\mathbf{i} + u^2\,\mathbf{j} + v^2\,\mathbf{k}$, $0 \leq u, v \leq 1$. Laske $\mathcal{S}$:n pinta-ala.

4. a) Laske kentän

$$\mathbf{F} = \frac{x^2 \sin y}{z}\mathbf{i} + \frac{x \cos y}{z}\mathbf{j} + x \sin y \ln z\,\mathbf{k}$$

vuo läpi laatikon $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi/2$, $1 \leq z \leq e$ pinnan ulospäin.

b) Olkoon C käyrä, jolla on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = 3(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + 2(\sin t - \cos t)\mathbf{j},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Laske C:n rajoittaman alueen pinta-ala soveltamalla Greenin lausetta vektorikenttään $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$.

Sylinterikoordinaattimuunnos

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \\ dV &= r\,dr\,d\theta\,dz \end{aligned}$$

Pallokoordinaattimuunnos

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \\ dV &= \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \end{aligned}$$

Kaavoja

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV \\ \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 t &= \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \\ \sin^2 t &= \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \end{aligned}$$