4. (a) 2 kHz taajuus < Nyquistin rajataajuus = 6kHz/2 = 3kHz ja laskostumista ei tapahdu. 4 kHz on kuitenkin suurempi kuin Nyquistin rajataajuus, joten se laskostuu taajuudelle 4-6kHz = -2kHz ⇒ 2kHz. Näytteistetyssä signaalissa on siis vain 2kHz taajuutta välillä 0-3 kHz.

   (b) Nyquistin näytteenottoteoreeman mukaan signaalista tulee ottaa näytteitä vähintään kaksinkertaisella taajuudella sen korkeimpaan taajuuskomponenttiin verrattuna, jotta laskostumista ei tapahtuisi ⇒ f_s = 8kHz.

   (c)
$$N = \frac{1\text{ MHz}}{1\text{ kHz}} = 1000$$

   (d) Ikkunointi on funktion kertomista sopivalla *ikkunointifunktiolla* ennen muuntamista. Näin saadaan tietää signaalin taajuussisältö vain tietyltä aikaväliltä. Tämä voi olla hyödyllistä esim. taajuuskorjaimen pylväät. Ikkunointifunktiona voidaan käyttää esim. kanttipulssia tai gaussin pulssia.

5. (a)
$$y(t) = 100x(t) - 3x^3(t) = 10\cos(2\pi t) - \frac{3}{4}\cdot 0.1^3 \cdot (3\cos(2\pi t) + \cos(6\pi t))$$
$$= \left(10 - \frac{9}{4000}\right)\cos(2\pi t) + \left(\frac{3}{4000}\right)\cos(6\pi t) = 9.9910\cdot\cos(2\pi t) + 0.00075\cdot\cos(6\pi t)$$

   (b) Amplitudi ja vaihevasteet:
$$A(f) = |H(f)| = \sqrt{H(f)H^*(f)} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \quad \text{ja} \quad \phi(f) = -\arg\{H(f)\} = -\arg\left\{\frac{1-fj}{1+f^2}\right\} = \arctan(f)$$
$$s(t) = A(1)\left(10 - \frac{9}{4000}\right)\cos(2\pi t - \phi(1)) + A(3)\left(\frac{3}{4000}\right)\cos(6\pi t - \phi(3))$$
$$= 7.0695\cdot\cos(2\pi t - 0.78540) + 0.00023717\cdot\cos(6\pi t - 1.2490)$$

   (c)
$$d_{\text{tot1}} = \sqrt{\sum_n d_n} = d_3 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{\frac{3}{4000}}{10 - \frac{9}{4000}} \approx 0.0075\% \quad \text{ja} \quad d_{\text{tot2}} = \frac{u_3}{u_1} = \frac{0.00023717}{7.0695} \approx 0.0034\%$$

6. Ratkaistaan ensin järjestelmän siirtofunktio Fourier'n muuntamalla differentiaaliyhtälö.
$$u(t) = y'(t) = K\,(x(t) - y(t)) \Rightarrow y'(t) + Ky(t) = Kx(t) \Rightarrow (2\pi jf + K)Y(f) = KX(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{K}{2\pi jf + K} = \frac{K}{s+K}$$

   (a) Tällä ensimmäisen asteen siirtofunktiolla on yksi napa kohdassa $s = -K$. Järjestelmä on stabiili kun sitä kuvaavan siirtofunktion navat sijaitsevat imaginääritason vasemmassa puolitasossa ja näin on kun $K > 0$.

   (b)
$$Y_b(f) = H(f)X_b(f) = H(f)\mathcal{F}\{x_b(t)\} = H(f)$$
$$y_b(t) = h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{K}{2\pi jf + K}\right\} = K\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1/K}{2\pi jf/K + 1}\right\} = Ke^{-Kt}u_H(t) = e^{-t}u_H(t)$$

   (c) Ratkaistaan tämä kohta konvoluution avulla, koska meillä on jo järjestelmän impulssivaste $h(t)$ (b) -kohdasta. Konvoluution laskeminen jakautuu kahteen alueeseen. Alueessa $t \le 0$ konvoloitavat funktiot eivät ole päällekkäin ja $y_c(t \le 0) = 0$. Alueessa $t > 0$:
$$y_c(t) = (x_c \otimes h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_H(t-\lambda))\left(e^{-\lambda}u_H(\lambda)\right)d\lambda = \int_0^t e^{-\lambda}d\lambda = -\Big/_{0}^{t} e^{-\lambda}d\lambda = 1 - e^{-t}$$

   Vasteeksi saadaan siis
$$y_c(t) = \left(1 - e^{-t}\right)u_H(t)$$