MS-A0003 & MS-A0005 Matriisilaskenta (Turunen / Karjalainen)
Tiistai 12.12.2017 klo 16:30-19:30

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. a) Laske vektorien $u = (1, -2, 2)$ ja $v = (1, 1, -4)$ välinen kulma.

   b) Kirjoita $z = (2 - \mathrm{i})/(1 + 3\mathrm{i}) \in \mathbb{C}$ muotoon $z = a + \mathrm{i}b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.

   Ratkaisu: a) Sisätulolle pätee $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\,\cos(\alpha)$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$ on vektorien $u, v \in \mathbb{R}^3$ välinen kulma. Siten

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \\
&= \frac{(1)(1) + (-2)(1) + (2)(-4)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} \quad = \quad -1/\sqrt{2} \\
&= \cos(\pm 3\pi/4).
\end{aligned}$$

   Jos vaaditaan $0 \le \alpha \le \pi$, saadaan kulmaksi $\alpha = 3\pi/4$ radiaania (eli $(3\pi/4)\frac{180}{\pi} = 135$ astetta).

   b) Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}
z &= \frac{2 - \mathrm{i}}{1 + 3\mathrm{i}} \\
&= \frac{(2 - \mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i})}{(1 + 3\mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i})} \\
&= \frac{(2 - 3) + \mathrm{i}(-1 - 6)}{1^2 + 3^2} \\
&= \frac{1}{10} + \mathrm{i}\frac{-7}{10}.
\end{aligned}$$

2. Kirjoita matriisimuodossa yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$
ja etsi sen kaikki ratkaisut $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ Gauss-eliminaatiolla (tai osoita ettei ratkaisuja ole olemassa).

Ratkaisu: Hyviä Gauss-eliminoinnin järjestyksiä on useita, esim.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 2 \\ 2 & 3 & 4 & | & 2 \\ 3 & 6 & 9 & | & 3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

mistä asettamalla $x_3 = t \in \mathbb{R}$ saadaan

$$x = (t + 1, -2t, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Ratkaisut muodostavat siten suoran avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

3. Olkoon $R = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, missä $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ja $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Etsi matriisin R ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit.

b) Etsi matriisille R unitaarinen diagonalisointi. Toisin sanoen etsi unitaarinen matriisi V, jolle $E = V^*RV$ on diagonaalinen. Tarkista tuloksesi laskemalla VEV^*.

Ratkaisu: a) Tässä siis $S^{-1}RS = D$ on diagonaalinen. Matriisin R ominaisarvot ovat ilmiselvästi 9 ja 4, ja vastaavat ominaisvektorit saadaan S:n sarakkeista: ne ovat siis muotoa

$s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, missä vakiot $s \neq 0 \neq t$.

b) Matriisiksi E kelpaa ominaisarvojen diagonaalimatriisi $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, ja V saadaan skaalaamalla matriisin S sarakkeet 1-normisiksi.

(Huom! S:n sarakkeet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.)

S:n molempien sarakkeiden normit ovat $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, joten kelpaa $V = \frac{1}{\sqrt{5}}S$. Tarkistus:

$$
\begin{aligned}
VEV^* &= \frac{1}{\sqrt{5}}SD(\frac{1}{\sqrt{5}}S)^* \\
&= 5^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^* \\
&= 5^{-1} \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 18 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 5^{-1} \begin{bmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 40 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad = \quad R.
\end{aligned}
$$

Huom! Tehtävän a-kohdassa toki ominaisarvot $\lambda \in \mathbb{C}$ voi laskea myös karakteristisesta yhtälöstä $0 = \det[R - \lambda I]$ ja sitten löytää vastaavat ominaisvektorit Gauss-eliminaatiolla. Ratkaisussa voi kuitenkin oikaista, sillä $RS = SD = [S_1\ S_2]D = [9S_1\ 4S_2]$.

Tehtävän b-kohdassa unitaarisen matriisin V sarakkeet olisi voinut kertoa millä tahansa vakioilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, joille $|\alpha| = 1 = |\beta|$: ja jos matriisin D ominaisarvojen paikat olisi keskenään vaihdettu, olisi pitänyt vastaavasti vaihtaa V:n sarakkeiden paikat.

4. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ singulaariarvohajoitelma (SVD).
Toisin sanoen etsi matriisit U, Σ, V, joille $A = U\Sigma V^*$, missä $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ovat ortogonaalisia (unitaarisia) ja $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ on singulaariarvojen diagonaalimatriisi. Tarkista, että $A = U\Sigma V^*$. (Vihje: huomaa, että $A^*A = R$ edellisestä tehtävästä!)

Ratkaisu: Nyt $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, joten $A^*A = R$ edellisestä tehtävästä! Matriisi V saadaan siis edellisestä ratkaisusta, ja A:n singulaariarvot ovat $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{4} = 2$. Siten $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Koska $A = U\Sigma V^*$, pätee $AV = U\Sigma$, ja tässä

$$AV = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -2t \\ 2s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s & -4t \\ 5s & 0 \\ 4s & 2t \end{bmatrix},$$
$$U\Sigma = [U_1\ U_2\ U_3]\ \Sigma = [\sigma_1 U_1\ \sigma_2 U_2] = [3U_1\ 2U_2].$$

Siten $U_1 = \begin{bmatrix} 2s/3 \\ 5s/3 \\ 4s/3 \end{bmatrix}$ ja $U_2 = \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$. Vektoriksi $U_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ kelpaa mikä tahansa yksikkövektori ($1 = \|U_3\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2$), joka on kohtisuorassa vektoreita U_1, U_2 vastaan: esim. $(a, b, c) = (1, -2, 2)/3$ kelpaa. Tarkistus:

$$\begin{aligned}
U\Sigma V^* &= \begin{bmatrix} 2s/3 & -2t & a \\ 5s/3 & 0 & b \\ 4s/3 & t & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -2t \\ 2s & t \end{bmatrix}^* \\
&= \begin{bmatrix} 2s & -4t \\ 5s & 0 \\ 4s & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^* & 2s^* \\ -2t^* & t^* \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2|s|^2 + 8|t|^2 & 4|s|^2 - 4|t|^2 \\ 5|s|^2 & 10|s|^2 \\ 4|s|^2 - 4|t|^2 & 8|s|^2 + 2|t|^2 \end{bmatrix} \\
&\overset{|s|^2=1/5=|t|^2}{=} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A.
\end{aligned}$$