

Todennäköisyyslaskennan peruskurssi TILM3553, tentti 20.12.2017, 3h

Tentissä saa olla mukana matematiikan ja todennäköisyyslaskennan kaava-arkki sekä tenteissä sallittu laskin.

- Otetaan korttipakasta (52 korttia) 5 korttia. Millä todennäköisyydellä kaikki ovat samaa maata? (Eri maita on 4 ja kutakin maata on 13 kappaletta).
 - Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia. Käyttäen varianssin määritelmää osoita, että $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$.
 - Heitetään kalita noppaa niin monta kertaa kunnes molemmat silmäluvut ovat yhtäsuuret. Millaista jakaumaa tarvittavat heittokerrat noudattavat? Millä todennäköisyydellä heittokertoja tarvitaan vähemmän kuin 3?
- Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y seuraavanlainen yhteispistetodennäköisyysfunktio

		Y		
		1	2	3
	1	0	0.05	0.1
X	2	0.30	0.30	0.1
	3	0	0.05	0.1

- Määrää satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat. Mikä on tapahtuman $X < Y$ todennäköisyys?
 - Laske satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot $E(X)$, $E(Y)$ sekä varianssit $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$
 - Laske $\text{Cor}(X, Y)$. Ovatko X ja Y riippumattomia?
- Kaupassa käy päivän aikana 1000 asiakasta. Oletetaan, että asiakkaat ostavat hyödykkeitä toisistaan riippumatta ja yhden asiakkaan hyödykkeisiin käyttämän rahamäärän odotusarvo on 20 euroa sekä keskihajonta 20 euroa. Olkoon X = Kaupassa päivän aikana kaikkien asiakkaiden kuluttama rahamäärä.
 - Millainen satunnaismuuttujan X jakauma likimäärin on?
 - Määritä todennäköisyydet $P(X > 21000)$ ja $P(19000 < X < 21000)$. Rahamäärän saa olettaa jatkuvaksi muuttujaksi.
 - Kauppias tilastoi erinomaisia kauppapäiviä, jollaisiksi hän luokittelee päivät jolloin $X > 21000$. Oletetaan, että joka päivä kaupassa käy tasan 1000 asiakasta ja eri päivien ostokset ovat toisistaan riippumattomia. Millä todennäköisyydellä viikossa (=7 päivää) on ainakin yksi hyvä kauppapäivä?
 - Potilaan oireiden perusteella lääkäri arvelee, että potilaalla on tietty maksasairaus todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$. Asiaa tutkittiin kahdella testillä. Testi A antaa väärän positiivisen tuloksen (testin mukaan sairaus on vaikka oikeasti ei ole) todennäköisyydellä 0.1 ja väärän negatiivisen (testin mukaan sairautta ei ole vaikka oikeasti on) tuloksen todennäköisyydellä 0.05. Testin B vastaavat todennäköisyydet ovat 0.05 ja 0.08. Oletetaan, että kum potilaan tila tiedetään, niin testien tulokset ovat riippumattomat.
 - Millä todennäköisyydellä testi A antaa positiivisen tuloksen.
 - Millä todennäköisyydellä kumpikin testi antaa positiivisen tuloksen?
 - Jos kumpikin testi antaa positiivisen tuloksen, niin millä todennäköisyydellä potilas onkin terve?