MS-C2111 Stokastiset prosessit | **Tentti**
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos | 13.12.2017, 16:30–19:30
Aalto-yliopisto | K Kytölä & A Karrila

Tentissä on 4 tehtävää, kukin arvoltaan 6 pistettä. Tentissä saa käyttää ylioppilastutkintolautakunnan hyväksymää **laskinta** ja A4-kokoista **muistiinpanolappua**. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolappua ei tarvitse palauttaa.

Vuoden 2017 kurssin harjoituksista kertyneet bonuspisteet (0–6) lisätään tentin kokonaispistemäärään. Erityisesti harjoituksista maksimihyvityksen saaneen opiskelijan riittää periaatteessa ratkaista vain valitsemansa kolme tenttitehtävää kurssin maksimipisteiden saamiseksi.

1. Tarkastellaan diskreettiaikaista Markov-ketjua tilajoukolla $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisilla

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

   (a) Piirrä Markov-ketjun siirtymäkaavio. **(1 p)**

   (b) Onko Markov-ketjulla yksikäsitteinen tasapainojakauma? **(1 p)**

   (c) Jos Markov ketju tällä hetkellä on tilassa 2, niin millä todennäköisyydellä se on tilassa 2 myös neljän aika-askeleen kuluttua? **(2 p)**

   (d) Laske odotettu kulkuaika tilaan 4 lähtien tilasta 1. **(2 p)**

2. Oletetaan, että meteorisuihkun aikana amatööritähtitieteilijä Stellan havaitsemat tähdenlennot muodostavat Poisson-prosessin intensiteetillä $\lambda = 0.45$ (yksikkönä $\frac{1}{\text{min}}$), laskuriprosessinaan $N = \big(N(t)\big)_{t\geq 0}$ (ajan t yksikkönä minuutti). Laske seuraavat suureet ja perustele vastauksesi:

   (a) Todennäköisyys $\mathbb{P}\big[N(15) = 5\big]$ sille, että varttitunnin aikana Stella havaitsee tasan viisi tähdenlentoa. **(1 p)**

   (b) Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}\big[N(20) = 10 \,\big|\, N(10) = 5\big]$ sille, että Stella kahdenkymmenen ensimmäisen minuutin aikana havaitsee yhteensä kymmenen tähdenlentoa, kun hänen tiedetään ensimmäisessä kymmenessä minuutissa havainneen niitä viisi. **(2 p)**

   (c) Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}\big[N(5) = 0 \,\big|\, N(30) = 12\big]$ sille, ettei Stella ensimmäisen viiden minuutin aikana havainnut yhtään tähdenlentoa, kun hänen tiedetään koko puolen tunnin tarkkailurupeamansa aikana havainneen niitä tusinan verran. **(2 p)**

   (d) Todennäköisin lukumäärä tähdenlentoja, jonka Stella havaitsee ensimmäisen 15 minuutin aikana. **(1 p)**

3. Lähettämällä samanlaiset kirjeet kolmelle henkilölle Tarmo aloittaa vanhojen hyvien aikojen ketjukirjeen, jossa vastaanottajaa pyydetään lähettämään kopio kirjeestä edelleen kolmelle uudelle vastaanottajalle. Oletetaan yksinkertaistetusti, että kukin ketjukirjeen vastaanottaja toisistaan riippumattomasti todennäköisyydellä 0.40 noudattaa kirjeen pyyntöä kolmen kopion edelleenlähettämisestä ja muussa tapauksessa ei edelleenlähetä yhtään kopiota.

   (a) Kirjoita yhden vastaanottajan edelleenlähettämien kirjeiden lukumäärän Y todennäköisyydet generoiva funktio ϕ_Y. **(2 p)**

   (b) Odotusarvoisesti, kuinka moni saa kirjeen sellaiselta henkilöltä, joka sai kirjeen ketjun alkuperäiseltä lähettäjältä, Tarmolta? **(2 p)**

   (c) Mikä on (ylläolevan yksinkertaistetun mallin mukainen) todennäköisyys sille, että ketjukirjeen lähetteleminen edelleen jatkuu loputtomiin? **(2 p)**
   Vihje: Jos kolmannen asteen polynomiyhtälön yhden juuren osaa päätellä, palautuu yhtälön ratkaiseminen toisen asteen yhtälön ratkaisuun.

4. Lentokenttäbussi kuljettaa kierroksellaan matkustajia juna-asemalta kahteen mahdolliseen terminaaliin, A ja B. Vietyään kaikki matkustajat terminaaleihinsa bussi palaa asemalle hakemaan seuraavat matkustajat. Bussin kierroksessa kestää:

   - 12 min, jos kyydissä on molempiin terminaaleihin pyrkiviä matkustajia
   - 10 min, jos kyydissä on terminaaliin B pyrkiviä mutta ei terminaaliin A pyrkiviä matkustajia
   - 8 min, jos kyydissä on vain terminaaliin A pyrkiviä matkustajia (myös vaikka matkustajia ei olisi ollenkaan).

   Uusia terminaaliin A pyrkiviä matkustajia tulee asemalle riippumattomin $\mathrm{Exp}(\frac{1}{2\,\mathrm{min}})$-jakautunein väliajoin ja uusia terminaaliin B pyrkiviä matkustajia tulee asemalle riippumattomin $\mathrm{Exp}(\frac{1}{6\,\mathrm{min}})$-jakautunein väliajoin, toisistaan riippumattomasti. Aina edelliseltä kierrokselta palattuaan, bussi ottaa kierroksen aikana saapuneet matkustajat kyytiin ja lähtee uudelle kierrokselleen.

   (a) Muodosta bussin kierroksista diskreettiaikainen kolmitilainen Markov-ketju, jonka tilat kuvavat sitä, onko kierroksella molempiin terminaaleihin pyrkiviä, terminaaliin B pyrkiviä mutta ei terminaaliin A pyrkiviä, vai vain terminaaliin A pyrkiviä matkustajia (mukaanlukien kierrokset, joilla matkustajia ei ole ollenkaan). Perustele lyhyesti, miksi prosessi on Markov-ketju. Anna ketjun siirtymätodennäköisyysmatriisi. **(3 p)**

   (b) Pitkällä aikavälillä, kuinka kauan bussin kierroksessa keskimäärin kestää? **(3 p)**