

MS-C1342 Lineaarialgebra

Loppukoe 14.12.2017

Ei laskimia, ei taulukoita. Koeaika on 3 tuntia.

Sinulla on kaksi vaihtoehtoa :

- Ratkaise tehtävät 1-4. Tällöin kurssin arvosana määräytyy laskuharjoitustehtävien ja kokeen arvosanan perusteella.
- Ratkaise tehtävät 1,3,5,6. Tällöin kurssin arvosana määräytyy pelkän kokeen arvosanan perusteella.

1. Olkoot funktio $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{3}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2.$$

- Etsi matriisi $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ siten, että $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$.
- Näytä että f on sisätulo.
- Määritellään normi $\|\mathbf{x}\|_f^2 := f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Olkoot

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Etsi $\alpha \in \mathbb{R}$ siten että

$$\|\mathbf{y} - \alpha \mathbf{x}\|_f^2$$

saa pienimmän arvonsa.

2. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ singulaariarvohajotelma muotoa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- Määritä ortonormaali kanta avaruuksille $R(A)$ sekä $N(A)$.
- Etsi vektorit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$A = \mathbf{a} \mathbf{b}^T.$$

(iii) Etsi kaikki yhtälöryhmän

$$A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ratkaisut.

3. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ siten, että

$$A_1 = \begin{bmatrix} \pi & \alpha \\ \alpha & \sqrt{2017} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Mitkä matriiseista A_1, A_2, A_3 ovat diagonalisoituvia?
(ii) Kirjoita matriisi A_2 muodossa $A_2 = I + N$. Näytä, että N on nilpotentti ja todista identiteetti

$$A_2^n = I + nN.$$

Laske A_2^{2017} ja A_3^{1412} .

4. Olkoot $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Laske matriisin $R(A)$:n ortonormaali kanta käyttämällä Gram-Schmidt prosessia.
(ii) Laske ortogonaaliprojektio $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $R(A)$:lle
(iii) Tarkastellaan tehtävää: Etsi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$$

saa pienimmän arvonsa. Näytä, että tehtävän ratkaisu \mathbf{x} toteuttaa yhtälön $A\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, jossa P on kohdassa (ii) määritelty ortogonaaliprojektio.

5. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ singulaariarvohajotelma muotoa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- (i) Määritä $R(A)$ sekä ortogonaaliprojektio (Euklidisen sisätulon mielessä) $R(A)$:lle
(ii) Olkoot $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Tarkastele PNS - tehtävää: etsi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

saa pienimmän arvonsa. Näytä, että PNS-tehtävän ratkaisu \mathbf{x} toteuttaa yhtälön $A\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, jossa P on ortogonaaliprojektio $R(A)$:lle.

- (iii) Ratkaise PNS - tehtävä, kun \mathbf{b} on siten, että

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

6. Olkoot $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $M = M^T$ kääntyvä matriisi.

- (i) Näytä että $\|\mathbf{x}\|_M := \|M\mathbf{x}\|_2$ on vektorinormi.
(ii) Näytä, että vektorinormin $\|\cdot\|_M$ indusoimalle matriisnormille $\|\cdot\|_M$ pätee

$$\|A\|_M := \|MAM^{-1}\|_2.$$

- (iii) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Laske $\|A\|_M$ ja $\|A\|_2$