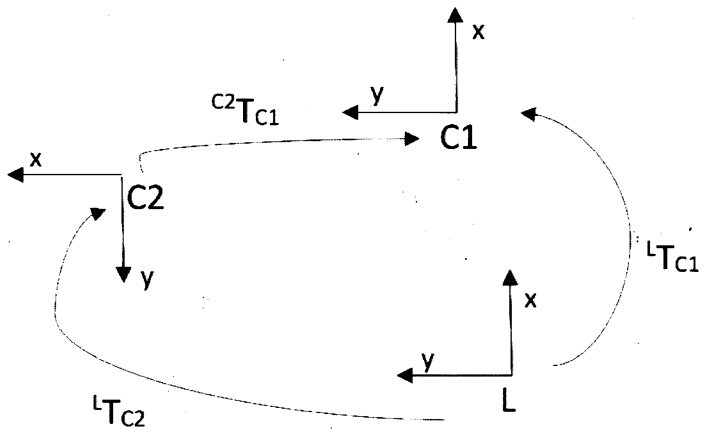
ELEC-C1320 – Robotiikka, Exam 14.12.2017 (3 hours)

It is allowed to use a calculator and a book of mathematical equations (e.g. MAOL) in the exam.

You can use Finnish, English or Swedish in your solutions. Tehtävänannot on esitetty suomeksi sinisellä värillä.

1. The task is to solve the unknown relative location of frame {C2} with respect to frame {L} by utilizing the known relative locations of coordinate frames ${}^{C2}\mathbf{T}_{C1}$ and ${}^{L}\mathbf{T}_{C1}$. The setup is illustrated in the figure below. In other words, determine, on the matrix symbol level, the matrix equation for the unknown transformation matrix ${}^{L}\mathbf{T}_{C2}$. Tehtävänä on ratkaista koordinaatiston {C2} suhteellinen asema koordinaatiston {L} suhteen tunnettujen suhteellisten koordinaatistomuunnosten ${}^{C2}\mathbf{T}_{C1}$ and ${}^{L}\mathbf{T}_{C1}$ avulla. Koordinaatistoasetelma on esitetty alla olevassa kuvassa. Toisin sanoen, määritä tunnettujen muunnosmatriisien avulla matriisisymbolitason matriisiyhtälö tuntemattomalle muunnosmatriisille ${}^{L}\mathbf{T}_{C2}$. (9 points)



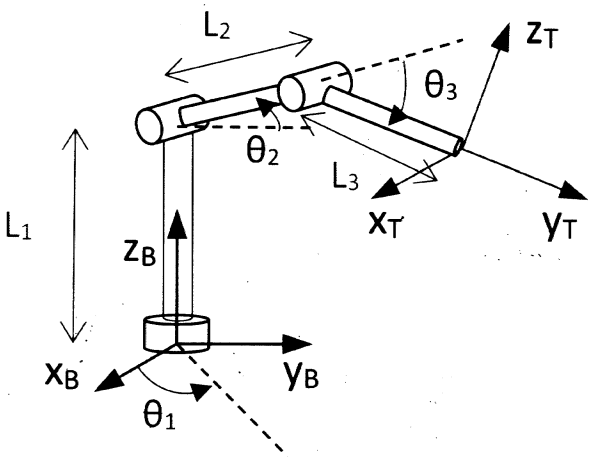
2. 3D-frame {B} is located initially coincident with the frame {A}. We first rotate frame {B} about its y_B-axis by 90 degrees. Then we translate the origin of the rotated frame {B} 5 units in the direction of its z-axis. 3D-koordinaatisto {B} on aluksi samassa paikassa ja asennossa koordinaatiston {A} kanssa. Sitten koordinaatiston {B} asentoa muutetaan kiertämällä sitä y_B-akselin ympäri 90 astetta. Tämän jälkeen kiertyneen koordinaatiston {B} origon paikkaa siirretään 5 yksikköä oman z-akselinsa suuntaan.

   a) Give the 4x4 homogenous transformation matrix which describes the position and orientation of frame {B} with respect to frame {A}. Määritä 4x4 homogeeninen muunnosmatriisi, joka kuvaa koordinaatiston {B} paikkaa ja asentoa koordinaatiston {A} suhteen. (6 points)

   b) The coordinates of a point **P** with respect to frame {B} be are [x=3,y=0,z=0]. What are the coordinates of point **P** given with respect to frame {A}? Pisteen **P** koordinaatit koordinaatiston {B} suhteen ovat [x=3,y=0,z=0]. Mitkä ovat pisteen **P** koordinaatit koordinaatiston {A} suhteen? (6 points)

3. In the figure a 3-axes RRR-type manipulator is shown. When all the joint angles have a value zero, the upper arm (i.e. "shoulder" and "elbow" links) is oriented horizontally above the X_B axis. In the joint configuration, shown in the figure, the angle θ_1 has a positive value, the angle θ_2 (angle of the shoulder link with respect to the X_BY_B-plane) has also a positive value but the angle θ_3 which rotates the last link with respect to the "shoulder" link has a negative value. Kuvassa on esitetty 3-akselisen manipulaattorin kinemaattinen rakenne. Kun kaikki nivelohjauskulmat ovat nollia, mekanismin kaksi ulointa vartta ovat vaakasuorassa asennossa X_B-akselin yläpuolella. Kuvan esittämässä tilanteessa kulman θ_1 arvo on positiivinen samoin kuin kulman θ_2 arvo (olkavarren kulma X_BY_B-akselien määrittämän tason suhteen) sitä vastoin kulman θ_3, joka kuvaa kyynärvarren kiertokulmaa olkavarren suhteen, arvo on negatiivinen.

Solve the forward kinematics problem of the manipulator to describe the tool frame {T} with respect to the robot base frame {B}. In other words, assign the link frames in the figure and provide the corresponding DenavitHartenberg-parameters in a table. It is your choice to use either the Standard or Modified DH-parameter convention. Ratkaise manipulaattorin suora kinemaattinen muunnos, joka kuvaa työkalukoordinaatiston {T} paikkaa ja asentoa robotin peruskoordinaatiston {B} suhteen. Toisin sanoen, merkitse mekanismin nivel-/varsikoordinaatistot kuvaan sekä esitä vastaavat DenavitHartenberg-parametrit taulukossa. Voit vapaasti valita kumpaa DH-parametriesitystä käytät ratkaisussasi, eli vaihtoehtoina ovat "Standard"- tai "Modified"-parametrointitavat. (18 points)



5. In the figure below a 3-axes RPP manipulator mechanism is illustrated. When the angle of the first joint, θ_1, is zero the upper arm is oriented parallel to the y_B-axis. An external force **F** is exerted at the origin of the tool frame {T}. The force is marked with the red arrow in the figure. Alla olevassa kuvassa on esitetty 3-akselisen RPP robottimekanismin kinemaattinen rakenne. Kun ykkösnivelen ohjauskulma, θ_1, saa arvon nolla yläkäsivarsi asemoituu y_B-koordinaatiakselin yläpuolelle sen suuntaisesti. Ulkoinen voima, jota merkitään symbolilla **F**, kohdistetaan työkalukoordinaatiston {T} origoon. Ulkoista voimaa kuvaa punainen nuoli kuvassa.

The 3x3 Jacobian matrix for the linear velocity of the tool frame expressed with respect to the base frame {B} as a function of the joint velocities is / Työkalukoordinaatiston lineaarinopeutta peruskoordinaatiston {B} akselien suunnissa nivelnopeuksien funktiona kuvaa 3x3 jakobiaanimatriisi

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix}\frac{dx}{d\theta_1} & \frac{dx}{dd_2} & \frac{dx}{dd_3}\\ \frac{dy}{d\theta_1} & \frac{dy}{dd_2} & \frac{dy}{dd_3}\\ \frac{dz}{d\theta_1} & \frac{dz}{dd_2} & \frac{dz}{dd_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{d}_2\\ \dot{d}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos(\theta_1)\,d_3 & 0 & -\sin(\theta_1)\\ -\sin(\theta_1)\,d_3 & 0 & \cos(\theta_1)\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{d}_2\\ \dot{d}_3\end{bmatrix}$$

The value of the external force vector **F** is / Ulkoisen voimavektorin **F** arvo on

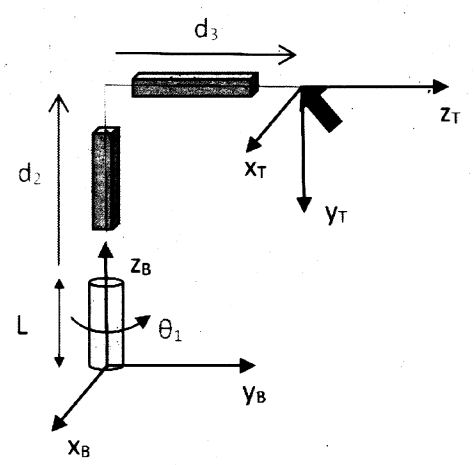
$${}^{B}\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}-5N\\ -5N\\ 0\end{bmatrix}$$

The values of the joint variables for the calculations are / Nivelohjauksien arvot laskentaa varten ovat

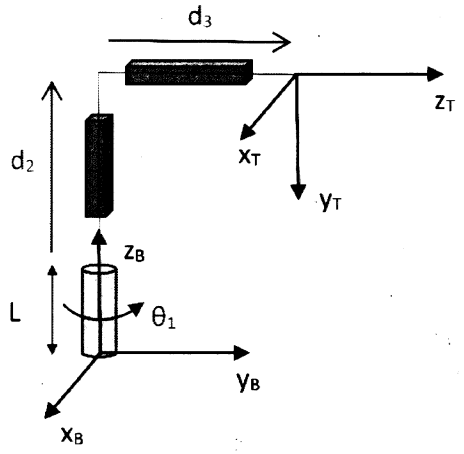
$\theta_1 = 0.0°, d_2 = 0.5m, d_3 = 0.7m$

The value for the constant base height of the mechanism is L=0.3m / Mekanismin rungon vakiokorkeusmitta L=0.3m

<u>The task is to calculate torques and forces affecting joints 1, 2 and 3 due to the external force in the given configuration of the manipulator arm. To solve the problem **you must utilize the Jacobian matrix of the manipulator**. Tehtävänä on laskea ulkoisen voiman vaikutuksesta syntyvät mekanismin nivelmomentit ja –voimat nivelille 1, 2, ja 3. **Tehtävä on ratkaistava mekanismin Jakobiaani-matriisin avulla.**</u> (12 points)



4. Find <u>the inverse kinematic transform</u> for the 3-axes RPP-type manipulator, shown in the figure below. More specifically, find the equations $\theta_1=f(x,y,z)$, $d_2=f(x,y,z)$, $d_3=f(x,y,z)$ where (x,y,z) is the position of the origin of the tool frame {T} with respect to the base frame {B} and (θ_1,d_2,d_3) are the joint control variables of the robot. When $\theta_1=0$, the upper arm is oriented above the y_B-axis. <u>Ratkaise käänteinen kinemaattinen muunnos</u> kuvassa näkyvälle 3-akseliselle RPP-manipulaattorimekanismille. Toisin sanoen anna yhtälöt $\theta_1=f(x,y,z)$, $d_2=f(x,y,z)$, $d_3=f(x,y,z)$ missä (x,y,z) on työkalukoordinaatiston {T} origon paikka peruskoordinaatiston {B} suhteen ja (θ_1,d_2,d_3) ovat robotin nivelohjausmuuttujat. Arvolla $\theta_1=0$, yläkäsivarsi on koordinaatistoakselin y_B yläpuolella. (14 points)



ELEC-C1320 Robotiikka - Equations

Link parameters and the corresponding elementary transformations as well as the symbolic form of the link matrix according to the **standard** Denavit and Hartenberg parameter convention:

$$^{j-1}\boldsymbol{A}_j(\theta_j, d_j, a_j, \alpha_j) = \boldsymbol{T}_{Rz}(\theta_j)\boldsymbol{T}_z(d_j)\boldsymbol{T}_x(a_j)\boldsymbol{T}_{Rx}(\alpha_j)$$

$$^{j-1}\boldsymbol{A}_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j\cos\alpha_j & \sin\theta_j\sin\alpha_j & a_j\cos\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j\cos\alpha_j & -\cos\theta_j\sin\alpha_j & a_j\sin\theta_j \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Link parameters and the corresponding elementary transformations as well as the symbolic form of the link matrix according to the **modified** Denavit and Hartenberg parameter convention:

$$^{j-1}\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{R}_x(\alpha_{j-1})\boldsymbol{T}_x(a_{j-1})\boldsymbol{R}_z(\theta_j)\boldsymbol{T}_z(d_j)$$

$$^{j-1}\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & a_{j-1} \\ s\theta_j c\alpha_{j-1} & c\theta_j c\alpha_{j-1} & -s\alpha_{j-1} & -s\alpha_{j-1}d_j \\ s\theta_j s\alpha_{j-1} & c\theta_j s\alpha_{j-1} & c\alpha_{j-1} & c\alpha_{j-1}d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementary rotation transformations (i.e. rotations about principal axis by θ):

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse of a 4x4 transformation matrix:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R & t \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T t \\ 0_{1\times3} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Derivation of trigonometric functions:

Dsinx = cosx

Dcosx = -sinx

Definition of (manipulator) Jacobian matrix:

If $y = F(x)$ and $x \in \mathbb{R}^n$ and $y \in \mathbb{R}^m$ then the Jacobian is the $m \times n$ matrix

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobian transpose transforms a wrench (a vector of forces and torques) applied at the end-effector, ${}^0\boldsymbol{g}$, to torques and forces experienced at the joints $\boldsymbol{Q}$:

$$Q = {}^0J(q)^T \, {}^0g$$