ELEC-C5210 Satunnaisprosessit tietoliikenteessä (5 op)

Tentti 29.1.2018

Jokainen kysymys on kuuden pisteen arvoinen. Tentin arvosana perustuu **viiteen** kysymykseen (ts. maksimi on 30 pistettä). Jos vastaat kuuteen kysymykseen, parhaat viisi vastausta vaikuttavat arvosteluun. Kannattaa siis yrittää vastata kaikkiin kysymyksiin. **Tavalliset taskulaskimet ovat sallittuja.** Luentomuistiinpanoja tai muuta materiaalia ei saa olla mukana.

1. Olet lähdössä lomalle viikoksi ja pyydät ystävääsi kastelemaan kukkasi lomasi aikana. Ilman kastelua kukka kuolee 90 % todennäköisyydellä. Toisaalta, vaikka kukka kasteltaisiin, se kuolee 20 % todennäköisyydellä. Lisäksi todennäköisyys, että ystäväsi unohtaa kastella kukkasi, on 30 %.

   (a) Millä todennäköisyydellä kukkasi on elossa lomaviikkosi jälkeen? (2p)

   (b) Jos kukkasi on kuollut lomasi jälkeen, mikä on todennäköisyys, että ystäväsi unohti kastella sen? (2p)

   (c) Jos ystäväsi unohti kastella kukkasi, mikä on todennäköisyys, että se on kuollut? (2p)

2. Olkoon Y satunnaismuuttuja Exp(λ)-jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0 \tag{1}$$

   missä $\lambda > 0$ on exponenttijakauman vauhti (*rate*) parametri.

   (a) Selitä, miten voit generoida satunnaislukuja Y:n jakaumasta, kun käytettävissäsi on välille $[0,1]$ tasajakautunut satunnaismuuttuja $X \sim \text{Tas}(0,1)$. (2p)

   4

   (b) Olkoon $x_1 = 0.4538$, $x_2 = 0.1912$, $x_3 = 0.8316$ ja $x_4 = 0.7138$ neljä satunnaislukua X:n jakaumasta. Generoi näiden avulla neljä eri satunnaislukua Y:n jakaumasta, kun $\lambda = 2$. (4p)

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ iid satunnaisotos (eli riippumattomia ja samoinjakatuneita satunnaismuuttujia) Exp(λ)-jakaumasta jonka tiheysfunktio annettiin tehtävässä 2.

   2 (a) Johda parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaattori (SUE) $\hat{\lambda}$. (4p)

   2 (b) Osoita, että Exp(λ) jakaumalla on niin sanottu unohtavaisuusominaisuus: $\mathsf{P}(Y > s + t \,|\, Y > s) = \mathsf{P}(Y > t)$. (2p)

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ iid satunnaisotos Exp(λ) jakaumasta (kuten tehtävässä 2). Testataan binääristä hypoteesiä

$$\mathcal{H}_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vastaan} \quad \mathcal{H}_1 : \lambda = \lambda_1, \qquad \text{missä } \lambda_0 < \lambda_1$$

   (a) Selitä (määritä) lyhyesti seuraavat peruskäsitteet :

   - ilmaisin ja kriittinen alue käyttäen käsitettä testisuure $T(\mathbf{y})$ (2p)
   - Tyypin I virhe. (1p)

   (b) Johda Neyman Pearson testin kriittinen alue yllä esitetylle hypoteesille. (3p)

5. Datan $x_1, \dots, x_n$ ajatellaan olevan iid satunnaisotos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f_X(x|\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \le x \le \theta + 1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

   (a) Selitä lyhyesti mikä on momenttimenetelmä. (2p)

   (b) Määritä momenttimenetelmän estimaattori parametrille θ. (2p)

   (c) Selvitä onko (b)-kohdan estimaattori harhaton eli osoita, että $\mathsf{E}[\hat{\theta}] = \theta$ (2p)

6. Olkoon $X > 0$ ja $Y > 0$ toisistaan riippumattomia jatkuvia satunnaismuuttujia

   a) Osoita, että satunnaismuuttujan $T = \frac{X}{Y}$ kertymäfunktio voidaan laskea kaavalla

$$F_T(t) = \mathsf{P}\left(\frac{X}{Y} \le t\right) = \int_0^\infty F_X(ty) f_Y(y) \mathrm{d}y,$$

   (3p)

   b) Olkoon $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ja $Y \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$. Huom. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ jakauman tiheysfunktion on annettu Tehtävässä 2. Määritä satunnaismuuttujan T kertymäfunktio. (3p)