Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Gutiérrez
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

Loppukoe 13.2.2016 klo 13–16.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Valitse viisi (5) tehtävää!

1. Esitä seuraavien käsitteiden määritelmät tai jokin määritelmän kanssa yhtäpitävä ehto:
   a) Metrisen avaruuden (X, d) osajoukon $A \subset X$ läpimitta $d(A)$.
   b) Metrisen avaruuden (X, d) osajoukon $A \subset X$ reuna ∂A.
   c) Funktio $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ on jatkuva.
   d) Jonon $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ osajono.
   e) Jono (x_n) on Cauchy-jono avaruudessa (X, d).
   f) Metrinen avaruus (X, d) on epäyhtenäinen.

2. Olkoon $d_1(x, y) = \sqrt{|x-y|}$ ja $d_2(x, y) = (x-y)^2$, kun $x, y \in \mathbf{R}$. Kumpi funktioista d_1 tai d_2 on metriikka reaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$? Todista sille metriikan kaikki ehdot. Anna toisen kohdalla konkreettinen esimerkki siitä, että yksi metriikan ehto ei toteudu.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $(E, \|.\|)$ normiavaruus ja $f\colon X \to E$ jatkuva pisteessä $a \in X$. Osoita $\varepsilon - \delta$-määritelmää käyttämällä, että funktio $2017f$ on jatkuva pisteessä a.

4. Määritellään $f_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ asettamalla $f_n(x) = n\sin(x/n)$, kun $x \in [0,1]$ ja $n \in \mathbf{N}$.
   a) Määritä funktiojonon (f_n) rajafunktio $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$,
   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1].$$
   b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti välillä $[0,1]$ kohti funktiota f? Vihje: sin-funktion 1. asteen Taylor-polynomi tai L'Hospitalin sääntö auttanee tilanteen hahmottamisessa.

5. Olkoon $X = C([0,1])$ varustettuna max-normiin $\|.\|_\infty$ liittyvällä metriikalla. Seuraavassa päättelyssä osoitetaan, että Volterran integraaliyhtälöllä
   $$x(t) = 1 + \frac{1}{4}\int_0^t x(s)\,ds$$
   on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in X$.

   Luentojen perusteella X on täydellinen. Määritellään funktio $f\colon X \to X$ asettamalla
   $$[f(x)](t) = 1 + \frac{1}{4}\int_0^t x(s)\,ds, \quad \text{kun } x \in X \text{ ja } t \in [0,1].$$
   Tämä tarkoittaa sitä, että uuden funktion $f(x) \in X$ arvo pisteessä $t \in [0,1]$ lasketaan tällä kaavalla. Täydennä seuraavat kohdat välivaiheineen ja perusteluineen:
   - Jos $x, y \in X$ ja $s \in [0,1]$, niin $|x(s) - y(s)| \le \|x - y\|_\infty$, joten
     $$\big|[f(x)](t) - [f(y)](t)\big| \le \text{vakio} \cdot \|x - y\|_\infty$$
     kaikilla $t \in [0,1]$. Tällöin siis $\|f(x) - f(y)\|_\infty \le \ldots$
   - Tästä seuraa, että Banachin kiintopistelauseen ehdot toteutuvat, jonka perusteella saadaan integraaliyhtälön ratkaisu.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ kompakteja joukkoja, joille $A \cap B = \emptyset$. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen luku $c > 0$, että kaikille $a \in A$ ja $b \in B$ on voimassa $d(a, b) \ge c$.
   Yksi mahdollinen vihje: Vastaoletuksesta seuraa, ettei mikään muotoa $c = 1/n$ oleva luku kelpaa, kun $n \in \mathbf{N}$.

Huom. 1: Yhden välikokeen voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin. Laskuharjoituspisteet eivät ole voimassa tentissä.
Huom. 2: Palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu — Alestalo/Gutiérrez
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

Final exam 13.2.2016 klo 13–16.

No calculators nor any additional material are allowed.

Choose (5) problems!

1. Define the collowing concepts or give another equivalent condition:
   a) Diameter $d(A)$ of a subset A in a metric space (X, d).
   b) Boundary ∂A of a subset A in a metric space (X, d).
   c) Function $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ is continuous.
   d) Subsequence of a sequence $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
   e) Sequence (x_n) is a Cauchy sequence in the metric space (X, d).
   f) Metric space (X, d) is disconnected.

2. Let $d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ and $d_2(x, y) = (x - y)^2$ for $x, y \in \mathbf{R}$. Which one of d_1 or d_2 is a metric in the set of real numbers $\mathbf{R}$? Prove all conditions of a metric for it. For the other, give a concrete example showing that one of the conditions for a metric is not satisfied.

3. Let (X, d) be a metric space, $(E, \|.\|)$ a normed space, and let $f\colon X \to E$ be continuous at a point $a \in X$. Using the $\varepsilon - \delta$ definition, show that the function $2017f$ is continuous at a.

4. We define $f_n\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ by setting $f_n(x) = n \sin(x/n)$ for $x \in [0, 1]$ and $n \in \mathbf{N}$.
   a) Find the limit function $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ of the sequence (f_n); i.e.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ x \in [0, 1].$$

   b) Does the sequence (f_n) converge uniformly to f on the interval $[0, 1]$?
   Hint: The first degree Taylor polynomial of sine or the L'Hospilal Rule may be helpful in figuring out the situation.

5. Let $X = C([0, 1])$ be endowed with the metric induced by the max-norm $\|.\|_\infty$. The following reasoning shows that the Volterra integral equation

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t x(s)\, ds$$

has a unique solution $x \in X$.

It follows from the lectures that X is complete. We define a function $f\colon X \to X$ by setting

$$[f(x)](t) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t x(s)\, ds \text{ for } x \in X \text{ and } t \in [0, 1].$$

This means that the value of the new function $f(x) \in X$ at the point $t \in [0, 1]$ is given by this formula. Fill in the details and explanations of the following steps:

- If $x, y \in X$ and $s \in [0, 1]$, then $|x(s) - y(s)| \le \|x - y\|_\infty$, so that

$$\big|[f(x)](t) - [f(y)](t)\big| \le \text{constant} \cdot \|x - y\|_\infty$$

  for all $t \in [0, 1]$. Therefore $\|f(x) - f(y)\|_\infty \le \ldots$
- This implies that the conditions of the Banach Fixed-point Theorem are satisfied, and we obtain the solution to the integral equation.

6. Let (X, d) be a metric space and let $A, B \subset X$ be compact sets such that $A \cap B = \emptyset$. Show that there is a positive number $c > 0$ such that for all $a \in A$ and $b \in B$ we have $d(a, b) \ge c$.
   One possible hint: Assuming the contrary, it follows that none of the numbers of the form $c = 1/n$, $n \in \mathbf{N}$, will satisfy the condition.

Huom. 1: Yhden välikokeen voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin. Laskuharjoituspisteet eivät ole voimassa tentissä.
Huom. 2: Palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

MS-C1540 13.2.2016 RATKAISUT/PJA

1. KTS. LUENNOT

2. Valitaan $x = 0, y = 1, z = 2$

$$\Rightarrow d_2(x,z) = (0-2)^2 = 4, \quad d_2(x,y) + d_2(y,z) = (0-1)^2 + (1-2)^2 = 1+1 = 2$$

$\Rightarrow$ kolmioepäyhtälö ei toteudu $\Rightarrow$ d_2 ei ole metriikka

d_1 on metriikka: Selvästi $d_1 \geq 0$.

(M1) $d_1(x,z) = \sqrt{|x-z|}$, $d_1(x,y) + d_1(y,z) = \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}$

$$\Rightarrow \left(d_1(x,y) + d_1(y,z)\right)^2 = |x-y| + |y-z| + \underbrace{2\sqrt{|x-y|}\sqrt{|y-z|}}_{\geq 0}$$

$$\geq |x-y| + |y-z| \geq |x-z| = d_1(x,z)^2, \quad x,y,z \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ (M1) tosi.

(M2) $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d_1(y,x)$, $x,y \in \mathbb{R}$

(M3) $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. $\square$

---

3. $f: X \to E$ jatkuva pisteessä $a \in X$

$2017f: X \to E$, $(2017f)(x) = 2017 f(x) \in E$, kun $x \in X$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\varepsilon' = \varepsilon/2017$ f:n jatkuvuuden määritelmässä

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, jolle: $x \in X$ ja $d(x,a) < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon' = \varepsilon/2017$.

Tällöin pätee: $x \in X$ ja $d(x,a) < \delta$

$$\Rightarrow \|2017f(x) - 2017f(a)\| = 2017\|f(x) - f(a)\| < 2017 \cdot \varepsilon/2017 = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $2017f$ on jatkuva pisteessä a. $\square$

4. $\sin t \approx t$, kun $|t|$ pieni $\Rightarrow n \sin(x/n) \approx n \cdot x/n = x$, suurilla n

Tarkemmin: $f(0) = \lim_{n\to\infty} n \sin(0) = 0$

$0 < x \le 1$: $f(x) = \lim_{n\to\infty} n \sin(x/n) = x \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/n)}{x/n} = x$,

koska tunnetusti $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Tulos: $\underline{\underline{f(x) = x,\ \text{kun } x \in [0,1]}}$

Merkitään $g_n(x) = x - n\sin(x/n) \Rightarrow g_n(0) = 0$ ja

$g_n'(x) = 1 - \cos(x/n) \ge 0 \Rightarrow g_n$ kasvava ja $\ge 0\ \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \text{MAX}\{|f_n(x) - f(x)| \mid 0 \le x \le 1\} = g_n(1) = 1 - n\sin(1/n)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Downarrow = 1 - \lim_{n\to\infty} n\sin(1/n) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ <u>suppenee tasaisesti</u>

---

5. $|[f(x)](t) - [f(y)](t)| = \left|\cancel{1} + \frac{1}{4}\int_0^t x(s)\,ds - \cancel{1} - \frac{1}{4}\int_0^t y(s)\,ds\right|$

$$= \frac{1}{4}\left|\int_0^t (x(s) - y(s))\,ds\right| \le \frac{1}{4}\int_0^t \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{\le \|x-y\|_\infty}\,ds$$

$$\le \frac{1}{4}\|x-y\|_\infty \underbrace{\int_0^t ds}_{= t \le 1} \le \frac{1}{4}\|x-y\|_\infty \qquad \forall x,y \in \underline{X},\ 0 \le t \le 1$$

$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_\infty \le \frac{1}{4}\|x-y\|_\infty\ \forall x,y \in \underline{X} \Rightarrow f$ on kontraktio, $q = \frac{1}{4} < 1$

$C([0,1]) = \underline{X}$ on täydellinen, joten BANACH-KP $\Rightarrow f(x) = x$ jollakin $x \in \underline{X}$, joka 1-käsitteinen $\square$

<u>Huom:</u> Derivoimalla $x'(t) = \frac{1}{4}x(t)$, joten $x(t) = e^{t/4}$ alkuehdon $x(0) = 1$ mojalla. Tehtävä olisi "mielenkiintoisempi" esim. muodossa $x(t) = 1 + \frac{1}{4}\int_0^t \sin(x(s))\,ds$, jolla ei ratkaisulauseketta!

6. Vastaoletus: Tällaista lukua $c>0$ ei ole, erityisesti mikään $c = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, ei käy.

$\Rightarrow \exists\, a_m \in A$, $b_m \in B$, joille $d(a_m, b_m) < 1/m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

A kompakti $\Rightarrow \exists$ suppeneva osajono $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = a \in A$, koska A suljettu.

B kompakti $\Rightarrow$ jonosta $(b_{m_k})_k$ voidaan valita suppeneva osajono $(b_{m_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, $\lim_{j\to\infty} b_{m_{k_j}} = b \in B$, koska B suljettu.

Tällöin $d(a,b) = \lim_{j\to\infty} d(a_{m_{k_j}}, b_{m_{k_j}}) = 0$, joten $a = b$.

RR, koska $A \cap B = \emptyset$. Vastaoletus siis väärä ja väite tosi. $\square$

Toinen tapa: Jatkuva funktio $d: X \times X \to [0,\infty[$ saavuttaa minimiinsä kompaktissa joukossa $A \times B$. Minimi >0, koska $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow c = \min_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a,b) > 0.$ $\square$