

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik

Deltentamen, 15.2.2017

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Till denna deltentamen får medtagas en **minneslapp** (handskriven på bara ena sidan av ett A4 papper, försedd med studienummer, namn och namnteckning), en av Studentexamensnämnden godkänd **räknare** samt skrivdon. Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika poäng. Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Ett företag har tre maskiner för att tillverka vissa komponenter. Deras andel av produktionen samt sannolikheten för defekta komponenter framgår ur tabellen nedan:

Maskin	Andel av produktionen	Sannolikheten för defekt komponent
A	0.20	0.035
B	0.45	0.020
C	0.35	0.040

- a) Beräkna sannolikheten att en kund som köper en komponent av företaget får en defekt komponent. (3p.)
 - b) Om en kund fått en defekt komponent, vad är sannolikheten att den tillverkats av maskin B? (3p.)
2. Antalet vita blodkroppar i 1mm^3 blod från en människa har en Poisson-fördelning med ett väntevärde λ , som beror på vilken människa det gäller. Betrakta en person för vilken $\lambda = 6000$. Använd normalapproximationen för att beräkna sannolikheten att det i 3mm^3 blod från personen i fråga finns färre än 17800 vita blodkroppar. (6p.)
 3. Den kontinuerliga slumpvariabeln X har täthetsfunktionen $f_X(x) = c \cdot x^{-r}$ för $x \geq 2$, $f_X(x) = 0$ annars, där parametern $r > 3$.
 - a) Konstanten c beror på parametern r . Visa att $c(r) = (r - 1) \cdot 2^{r-1}$, (1p.)
 - b) Beräkna väntevärdet $E[X] = \mu_X(r)$ av X (som alltså också är en funktion av r). (1p.)
 - c) Beräkna variansen $Var X = \sigma_X^2(r)$ av X . (2p.)
 - d) Ett stickprov av X gav följande resultat: $\{2.3638, 3.4534, 2.2227\}$. Bestäm moment-skattningen \widehat{r}_{MM} och maximum likelihood-skattningen \widehat{r}_{ML} av parametern r . Avrunda svaren till 2 decimaler. (2p.+2p.)
 4. 6 mätningar gav följande resultat: $(x, y) = (-3, 4), (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 0)$ samt $(3, 2)$.
 - a) Bestäm minsta kvadrat-skattningarna b_0 och b_1 för parametrarna β_0 och β_1 i den linjära regressionsmodellen $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, där mätfelen ϵ_i antas vara oberoende och normalfördelade med medelvärde 0 och varians σ^2 . (3p.)
 - b) Använd resultaten från a)-delen för att skatta väntevärdet av y , då $x = -2$. (1p.)

Se även formlerna och tabellen på baksidan.

Nyttiga (?) formler:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,

$0! = 1, n! = n \cdot (n-1)!$ för $n \in \mathbb{N} \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ för $m \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n.$$

Några diskreta fördelningar (utan närmare förklaringar):

$$X \sim \text{Geom}(p) : \Pr(X = k) = p \cdot (1-p)^k \Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}, \text{Var}X = \frac{1-p}{p^2}$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p) : \Pr(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow E[X] = np, \text{Var}X = np(1-p)$$

$$X \sim \text{Po}(m) : \Pr(X = k) = e^{-m} \cdot m^k / k! \Rightarrow E[X] = m, \text{Var}X = m$$

Några kontinuerliga fördelningar (utan närmare förklaringar):

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) : f_Y(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y} \Rightarrow E[Y] = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}Y = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Y \sim N(0, 1) : f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} \Rightarrow E[Y] = 0, \text{Var}Y = 1$$

Tilastolliset taulukot/Statistical Tables

N(0,1)

TAULUKKO 1.2. STANDARDOITU NORMAALI JAKAUMA N(0,1)
TABLE 1.2. STANDARD NORMAL DISTRIBUTION N(0,1)

Kertymäfunktion $\Phi(z)$ arvoja / Values of the cumulative distribution function $\Phi(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Esimerkki / Example:

If $z = +0.49$, then $\Phi(z) = \Pr(Z \leq +0.49) = 0.6879$