Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik

Tentamen, 12.5.2016

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.
Vid denna tentamen är vanliga funktionsräknare, grafiska räknare samt
Ilkka Mellins "Tilastolliset taulukot - Statistical Tables" tillåtna hjälpmedel.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. Bestäm sannolikheterna för att man vid singling av en slant får minst tre kronor vid fyra singlingar respektive minst fem kronor vid åtta singlingar. Vilken av dessa två händelser är mera sannolik?

2. Ett kommunikationssystem använder sig av binära symboler, "nollor" och "ettor" (tänk gärna på röksignaler), där i genomsnitt 40% av de sända signalerna är 0 och 60% är 1. På grund av störningar i systemet mottas dock 0 ibland som 1 och vice versa. Om 0 har sänts, mottas den som 0 med sannolikheten 0.9 och om 1 har sänts, mottas den som 1 med sannolikheten 0.8.
   a) Vad är sannolikheten att 0 har sänts, om 0 har mottagits?
   b) Vad är sannolikheten att 1 har sänts, om 1 har mottagits?

3. En urna innehåller 5 svarta och 3 vita kulor. Vi plockar ut kulor ur urnan utan återläggning, tills vi får en svart kula. Låt den diskreta slumpvariabeln X stå för antalet kulor vi plockade ur urnan. Då är $1 \leq X \leq 4$. Bestäm
   a) frekvensfunktionen $f(x) = Pr(X = x)$,
   b) väntevärdet $\mu_X = E[X]$ samt
   c) variansen $\sigma_X^2 = VarX$ för X.

4. Den kontinuerliga slumpvariabeln Y har täthetsfunktionen $f(y, \theta) = \frac{4}{\theta^4} \cdot y \cdot (\theta^2 - y^2)$ för $0 \leq y \leq \theta$ och 0 annars, där $\theta > 0$ är en okänd positiv parameter. Vi fick stickprovet 1.24, 0.63, 0.88, 1.07 och 0.98 ur denna fördelning, så vi får omedelbart att $\theta \geq 1.24$. Använd momentmetoden för att bestämma en punktskattning $\hat{\theta}$ av parametern θ.

5. Stadens höga herrar ville bygga ett stort höghus mitt i staden. För att påverka folkopinionen påstod de att minst 64% av stadens innevånare i åldersgruppen 18-67 år stödde byggandet av höghuset. Den kverulante herr Gnällspik trodde dock inte på stadens höga herrar, så tillsammans med en grupp likasinnade bråkstakar satte han upp nollhypotesen H_0 : "64% stöder byggandet" med den alternativa hypotesen H_1 : "Färre än 64% stöder byggandet". Därefter lät de en dator slumpmässigt välja ut 100 personer i nämndaålderskategori, som de sedan kontaktade per telefon och frågade, om de stödde byggandet av höghuset. Av de tillfrågade svarade 48 att de inte stödde byggandet. Resten antingen stödde byggandet, kunde inte ge något klart svar eller kunde inte nås trots flera påringningar.
   Kan herr Gnällspik och hans kumpaner förkasta sin nollhypotes på signifikansnivån 0.01? Använd normalapproximationen.

Se även formlerna och tabellen på baksidan.

Nyttiga (?) formler:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,

$0! = 1, n! = n \cdot (n-1)!$ för $n \in \mathbf{N} \Rightarrow m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ för $m \in \mathbf{N}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ för } n, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, k \leq n.$$

Några diskreta fördelningar (utan närmare förklaringar):

$X \sim Geom(p) : Pr(X = k) = p \cdot (1-p)^k \Rightarrow E[X] = p,\ VarX = \frac{1-p}{p^2}$

$X \sim Bin(n, p) : Pr(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \Rightarrow E[X] = np,\ VarX = np(1-p)$

$X \sim Po(m) : Pr(X = k) = e^{-m} \cdot m^k / k! \Rightarrow E[X] = m,\ VarX = m$

Några kontinuerliga fördelningar (utan närmare förklaringar):

$Y \sim Exp(\beta) : f_Y(y) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-y/\beta} \Rightarrow E[Y] = \beta,\ VarY = \beta^2$

$Y \sim N(0, 1) : f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} \Rightarrow E[Y] = 0,\ VarY = 1$

TAULUKKO 1.2. STANDARDOITU NORMAALIJAKAUMA N(0,1)

Kertymäfunktion $\Phi(z)$ arvoja.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Esimerkki:

Jos $z = +0.49$, niin $\Phi(z) = Pr(Z \leq +0.49) = 0.6879$.