

## MS-A0509 Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik

Deltentamen nr 2, 17.2.2016

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna deltentamen är vanliga funktionsräknare, grafiska räknare samt Ilkka Mellins "Tilastolliset taulukot - Statistical Tables" tillåtna hjälpmedel.

Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.

1. En urna innehåller 17 kulor, somliga svarta och somliga vita. Vi plockade slumpmässigt upp tre kulor ur urnan. Två av dem var svarta och en var vit. Därefter lade vi tillbaka dessa tre kulor i urnan. Bestäm maximum likelihood-skattningen av antalet svarta kulor i urnan (som naturligtvis måste vara ett heltal).
2. En kontinuerlig slumpvariabel  $Y$  säges vara exponential-fördelad med parametern  $\beta > 0$  (beteckning:  $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ ), om  $Y$  har täthetsfunktionen  $f(y) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-y/\beta}$  för  $y > 0$  och  $f(y) = 0$  för  $y < 0$ .  
Om vi har ett stickprov  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  från  $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ , så kan vi bestämma en punkt-skattning  $\hat{\beta}$  av parametern  $\beta$  mha. moment-metoden eller mha. maximum likelihood-metoden. Visa att för exponential-fördelningen ger bägge dessa metoder samma värde på  $\hat{\beta}$ . (Denna skattning har dessutom den goda egenskapen att den är väntevärdesriktig, men det behöver inte visas här.) (6p.)
3. Svakar ville undersöka, om singlar av en viss slant verkligen gav krona med sannolikheten  $p_0 = \frac{1}{2}$ . Han beslöt att singla slanten  $n$  gånger och anteckna antalet kronor  $x$  som han därvid skulle få. Därefter beräknade han ett 0.90 konfidensintervall  $[L_1, L_2]$  för  $x$  under antagandet att sannolikheten att få krona verkligen är  $p_0$ .
  - a) Förklara kortfattat vad som menas med att  $[L_1, L_2]$  är ett 0.90 konfidensintervall för  $x$ , om sannolikheten att få krona verkligen är  $p_0$ .
  - b) Svakar satte upp nollhypotesen  $H_0$ : "Sannolikheten  $p$  att få krona är  $p_0 = \frac{1}{2}$ " med den alternativa hypotesen  $H_1$ : "Sannolikheten  $p$  att få krona är  $\neq \frac{1}{2}$ " och singlar slanten  $n$  gånger. Han kunde sedan förkasta  $H_0$  på signifikansnivån 0.20, men inte på signifikansnivån 0.05. Förklara kortfattat vad det att nollhypotesen kan förkastas på signifikansnivån 0.20, men inte på signifikansnivån 0.05 innebär.
4. En torghandlare hävdar att det i genomsnitt finns minst 1kg morötter i varje morotspåse. Vikten hos morötterna i varje påse varierar förstås slumpmässigt och vi kan anta att vikterna är normalfördelade.
  - a) Om vi skall ta ett stickprov och genomföra en hypotesprövning, vad är då nollhypotesen och vad är den alternativa hypotesen?
  - b) Vi tog ett (relativt litet) stickprov bestående av 10 morotspåsar, vägde dem och fick följande resultat (i gram):  
984, 1006, 935, 923, 926; 1017, 889, 942, 992, 936  
Beräkna stickprovsmedelvärdet och stickprovsvariansen.
  - c) Testa nollhypotesen på signifikansnivåerna 0.05 och 0.01.