Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Gutiérrez
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

Kurssitentti ja yleinen tentti 12.2.2018 klo 13–16.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Osoita, että kaava

$$\|(x,y)\| = 2|x| + 3|y|$$

määrittelee normin tasossa $\mathbf{R}^2$.
b) Laske pisteiden $(1,2)$ ja $(3,5)$ välinen etäisyys a-kohdan normin määräämässä metriikassa d.

2. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ epätyhjiä.
a) Osoita, että niiden läpimitoille on voimassa epäyhtälö

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B),$$

jos $A \cap B \neq \emptyset$. (Läpimitalle on kurssilla käytetty myös merkintää $d(A) = \operatorname{diam}(A)$.)
b) Anna konkreettinen esimerkki (esim. kuvio) tilanteesta, jossa a-kohdan epäyhtälö ei ole voimassa tapauksessa $A \cap B = \emptyset$.

3. Tarkastellaan metrisen avaruuden (X,d) osajoukkoa $A \subset X$. Sen sisäsäde $r(A)$ määritellään kaavalla

$$r(A) = \sup\{r > 0 \mid \exists x \in A, \text{ jolle } B(x,r) \subset A\}.$$

a) Oletetaan, että $A \subset X$ on kompakti osajoukko, jolla on sisäpisteitä. Osoita, että $r(A)$ on äärellinen ja että on olemassa sellainen $a \in A$, jolle $B(a, r(A)) \subset A$.
b) Päteekö a-kohdan tilanteessa myös $\overline{B}(a, r(A)) \subset A$?

4. Tässä tehtävässä joukossa $\mathbf{R}$ käytetään tavallista metriikkaa. Määritellään $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

kun $n \in \mathbf{N}$. Eksponenttifunktion ominaisuudet oletetaan tunnetuiksi.
a) Määritä funktiojonon (f_n) pisteittäinen rajafunktio $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$ kohti funktiota f?
c) Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[1,2]$ kohti funktiota f.

5. Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $(E, \|.\|)$ normiavaruus ja $f, g \colon X \to E$ jatkuvia pisteessä $a \in X$. Osoita $\varepsilon - \delta$-määritelmää käyttämällä, että funktio $f + 3g$ on jatkuva pisteessä a.

6. a) Olkoon $f \colon (X,d) \to (Y,d')$ on tasaisesti jatkuva: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina, kun } x, y \in X \text{ ja } d(x,y) < \delta.$$

Osoita: Jos (x_n) on Cauchy-jono X:ssä, niin $(f(x_n))$ on Cauchy-jono Y:ssä.
b) Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia. Oletetaan, että avaruus X on epäyhtenäinen. Osoita, että tuloavaruus $Z = X \times Y$ on epäyhtenäinen. Tuloavaruuden metriikkana esimerkiksi kurssilla käsitelty

$$d((x,y),(u,v)) = \max(d_1(x,u), d_2(y,v)), \quad (x,y),(u,v) \in Z$$

(mutta metriikan valinta ei ole olennainen kohta).

Huom. 1: Kurssitentin voi uusia seuraavan yleisen tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.
Huom. 2: Palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

1. Bevisa att formeln

$$\|(x,y)\| = 2|x| + 3|y|$$

definierar en norm i planet $\mathbf{R}^2$.
b) Beräkna distansen mellan punkterna $(1,2)$ och $(3,5)$ i metriken d, som normen i del a) inducerar.

2. Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A, B \subset X$ icke tomma mängder.
a) Bevisa att deras diametrar satisfierar olikheten

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B),$$

om $A \cap B \neq \emptyset$. (På kursen har vi också använt beteckningen $d(A) = \mathrm{diam}(A)$ för diametern.)
b) Ge ett konkret exempel (t.ex. en figur) av en situation, där olikheten i del a) inte gäller om $A \cap B = \emptyset$.

3. Vi betraktar en delmängd $A \subset X$ i ett metriskt rum (X,d). Dess inre radie $r(A)$ definieras med formeln

$$r(A) = \sup\{r > 0 \mid \exists x \in A \text{ så att } B(x,r) \subset A\}.$$

a) Låt $A \subset X$ vara en kompakt delmängd som har inre punkter. Bevisa att $r(A)$ är ändlig och att det finns en punkt $a \in A$, som satisfierar $B(a, r(A)) \subset A$.
b) Gäller det i situationen i del a) också att $\overline{B}(a, r(A)) \subset A$?

4. I det här problemet använder vi den vanliga metriken i $\mathbf{R}$. Vi definierar $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

då $n \in \mathbf{N}$. Exponentialfunktionens egenskaper antas kända.
a) Bestäm funktionföljdens (f_n) punktvisa gränsfunktion $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

b) Konvergerar följden (f_n) likformigt i mängden $\mathbf{R}$ mot funktionen f?
c) Bevisa att följden (f_n) konvergerar likformigt i intervallet $[1,2]$ mot funktionen f.

5. Låt (X,d) vara ett metriskt rum, $(E, \|.\|)$ ett normerat rum och låt $f, g \colon X \to E$ vara kontinuerliga i punkten $a \in X$. Bevisa med hjälp av $\varepsilon - \delta$-definitionen, att funktionen $f + 3g$ är kontinuerlig i punkten a.

6. a) Låt $f \colon (X,d) \to (Y,d')$ vara likformigt kontinuerlig: För varje $\varepsilon > 0$ finns det ett $\delta > 0$, så att

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{då } x, y \in X \text{ och } d(x,y) < \delta.$$

Bevisa: Om (x_n) är en Cauchyföljd i X, så är $(f(x_n))$ en Cauchyföljd Y.
b) Låt (X, d_1) och (Y, d_2) vara metriska rum. Vi antar att rummet X är osammanhängande. Bevisa, att produktrummet $Z = X \times Y$ är osammanhängande. Metriken i produktrummet är t.ex.

$$d((x,y),(u,v)) = \max(d_1(x,u), d_2(y,v)), \quad (x,y),(u,v) \in Z$$

som behandlades på kursen (men valet av metrik är inte en väsentlig punkt).

RATKAISUT

1. $\|(x,y)\| \geq 0$ AINA

(N1): $\|(x,y)+(u,v)\| = \|(x+u,\, y+v)\| = 2|x+u| + 3|y+v|$

$\leq 2|x| + 3|y| + 2|u| + 3|v| = \|(x,y)\| + \|(u,v)\|$.

(N2): $\|c(x,y)\| = \|(cx,\, cy)\| = 2|cx| + 3|cy| = |c|\cdot(2|x| + 3|y|)$

$= |c|\cdot\|(x,y)\|$, kun $c \in \mathbb{R}$.

(N3): $\|(x,y)\| = 0 \iff 2|x| + 3|y| = 0 \iff |x| = |y| = 0 \iff (x,y) = \bar{0}$.

b) $d((1,2),(3,5)) = \|(1,2)-(3,5)\| = \|(-2,-3)\| = 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = \underline{\underline{13}}$.

---

2. a) Olkoon $x,y \in A\cup B$. Jos $x,y\in A$, niin $d(x,y) \leq d(A)$. Jos $x,y \in B$, niin $d(x,y) \leq d(B)$. Jos $x\in A, y\in B$, niin valitaan apupiste $c \in A\cap B$, jolloin $d(x,y) \leq d(x,c) + d(c,y) \leq d(A) + d(B)$.

$\Rightarrow$ AINA $d(x,y) \leq d(A) + d(B)$, joten $d(A\cup B) = \sup\limits_{x,y\in A\cup B} d(x,y) \leq d(A)+d(B)$.

b) $X = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ $\Rightarrow$ $d(A\cup B) = 1$, $d(A)+d(B) = 0$

---

3. a) Koska A:lla on sisäpisteitä, niin $r(A) > 0$ tai $r(A) = \infty$.

A kompakti $\Rightarrow$ A rajoitettu $\Rightarrow$ $r(A) < \infty$

$\forall m\in\mathbb{N}: r(A) - 1/m < r(A) \Rightarrow \exists x_m \in A$, jolle $B(x_m, r(A)-1/m) \subset A$.

A kompakti $\Rightarrow \exists$ osajono $(x_{\varphi(m)})_m$, jolle $x_{\varphi(m)} \to a \in A$.

Tällöin $B(a, r(A)) \subset A$, sillä muuten $\exists\, b \in X\setminus A$, jolle $d(b,a) < r(A)$, ja tästä seuraa RR, kun $d(a, x_{\varphi(m)}) + 1/\varphi(m) < r(A) - d(b,a)$. $\square$

b) A kompakti $\Rightarrow$ A suljettu. Koska $B(a,r(A)) \subset A$, niin $\overline{B(a,r(A))} \subset A$.

Mutta $\bar{B}(a,r) \neq \overline{B(a,r)}$ yleensä. Väite ei päde: $X = \{0\}\cup[1,\infty[\ \subset \mathbb{R}$

$A = \{0\} \Rightarrow r(A) = 1$, MUTTA $\bar{B}(0,1) = \{0,1\} \not\subset A$.

4. a) $x=0 \Rightarrow f_m(0) = e^0 = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow f(0) = 1$

$x \neq 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} e^{-mx^2} = 0 = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

b) f_m jatkuvia, f epäjatkuva $\Rightarrow$ ei suppene tasaisesti

c) $\sup_{x\in[1,2]} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,2]} e^{-mx^2} = e^{-m} \to 0$, kun $m \to \infty$

$\Rightarrow$ suppenee tasaisesti välillä $[1,2]$.

---

5. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $x \in X$, niin

$$\|(f+3g)(x) - (f+3g)(a)\| = \|(f(x)-f(a)) + 3(g(x)-g(a))\|$$
$$\leq \|f(x)-f(a)\| + 3\|g(x)-g(a)\|.$$

Jatkuvuus $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : d(x,a) < \delta_1 \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon/2$

$\exists \delta_2 > 0 : d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow \|g(x)-g(a)\| < \varepsilon/6$

Siis: $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; $d(x,a) < \delta \Rightarrow \|(f+3g)(x) - (f+3g)(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} + 3\cdot\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$. $\square$

---

6. a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tas. jatkuva, niin $\exists \delta > 0$ s.e. $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ aina, kun $d(x,y) < \delta$. Koska (x_n) on Cauchy, niin $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n, k \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_k) < \delta$

TULOS: $n, k \geq n_0 \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_k)) < \varepsilon$. $\square$

b) Jos $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset \neq B$, A, B avoimia,

niin $Z = (A \times Y) \cup (B \times Y)$, jossa $A \times Y \cap B \times Y = (A \cap B) \times Y = \emptyset$,

$A \times Y \neq \emptyset \neq B \times Y$ ja $A \times Y = pr_1^{-1}[A]$ = AVOIN,

$B \times Y = pr_2^{-1}[B]$ = AVOIN $\Rightarrow Z$ epäyhtenäinen. $\square$