KJR-C2002 Kontinuumimekaniikan perusteet, tentti 13.12.2017

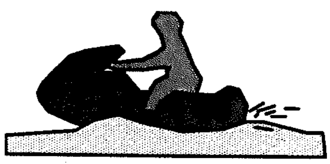
1. Jos $\vec{r}$ on paikkavektori, niin mitä ovat $\nabla\vec{r}$, $\nabla\cdot\vec{r}$ ja $\nabla\times\vec{r}$? Käytä Karteesisen koordinaatiston esityksiä

$$\vec{r}=\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \text{ ja } \nabla=\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix}.$$

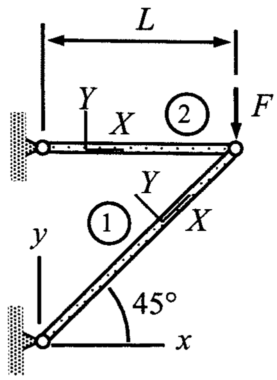
2. Määritä kappaleen nopeuden ja kiihtyvyyden komponenttien Lagrangen ja Eulerin esitykset, kun liikkeen kuvaus on

$$\vec{r}=\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \text{ jossa } \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1+kt \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}, \ \omega \text{ ja } k \text{ ovat vakioita ja } t\geq 0.$$

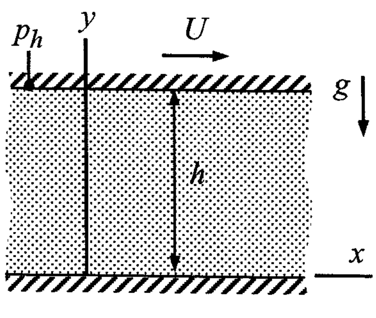
3. Kuvan esittämä vesiskootteri etenee vakiovauhdilla v. Veden (tiheys ρ) sisäänotto tapahtuu pohjassa olevan vaakasuoran aukon kautta. Sisääntulevan veden vauhti on likimain 0. Pumppu poistaa veden vaakasuuntaisena suihkuna, jonka poikkipinta on A ja tilavuusvirta Q $[Q]=\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Johda moottorin työntövoiman lauseke. Sovella liikemäärän taseen periaatetta ja esitä selvästi kappale, jota tarkastelet läheisillä ajanhetkillä t ja $t+\Delta t$.



4. Kuvan sauvat on kiinnitetty nivelillä tukiin ja toisiinsa ja rakennetta kuormittaa pystysuora voima F. Vaakasauvan 2 poikkipinta-ala on A, sauvan 1 poikkipinta-ala $\sqrt{2}A$ ja materiaalin kimmokerroin E. Laske sauvojen aksiaalijännitykset, aksiaalivenymät ja voiman vaikutuspisteen siirtymä.



5. Oheisen kuvan kahden vaakasuoran tason välinen etäisyys on h. Ylemmän tason nopeus on vakio U ja alempi taso on levossa. Tasojen välissä on nestettä, jonka tiheys ρ ja viskositeetti μ ovat vakioita. Mittaus ylemmän levyn kohdalla antaa paineen arvoksi p_h. Määritä nesteen nopeus $v_x(y)$ ja paine $p(y)$ lähtien Navier-Stokes yhtälöiden Karteesisen koordinaatiston komponenttiesityksistä.



KJR-C2002 Kontinuumimekaniikan perusteet, kaavakokoelma

TENSORIT

Komponenttiesitys $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$, $\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{xx}\vec{i}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{i}\vec{j} + \ldots + \sigma_{zz}\vec{k}\vec{k}$ jne.

Gradientti $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial x}$

Gaussin lause $\int_\Omega \nabla\cdot\vec{a}dV = \int_{\partial\Omega} \vec{n}\cdot\vec{a}dA$, $\int_\Omega \nabla a dV = \int_{\partial\Omega} \vec{n} a dA$

JÄNNITYS JA VENYMÄ

Jännitys $d\vec{F} = \vec{\sigma}dA$, $\vec{\sigma} = \vec{n}\cdot\vec{\vec{\sigma}}$, $\vec{\vec{\sigma}} = \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}$

Venymä ja venymänopeus $\vec{\vec{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}$, $\vec{\vec{d}} = \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}d_{xx} & d_{xy} & d_{xz}\\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz}\\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\ 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y},\ 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z},\ 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$d_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x},\ d_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y},\ d_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z},\ 2d_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y},\ 2d_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z},\ 2d_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

PARTIKKELIN LIIKE

Karteesinen koordinaatisto $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

Napakoordinaatisto $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi$

Pallokoordinaatisto $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r +$
$(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\vec{e}_\phi$

Suhteellinen liike $\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}$, $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$, $\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{a}_r + \vec{\alpha}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$

KONTINUUMIN LIIKE

Liike $\vec{r} = \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix}\aleph_x(X,Y,Z,t)\\ \aleph_y(X,Y,Z,t)\\ \aleph_z(X,Y,Z,t)\end{Bmatrix}$, $\vec{v} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial t}$, $\vec{a} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2}$

Lagrangen ja Eulerin esitys $f_L(X,Y,Z,t)$, $f_E(x,y,z,t)$, $f_E(x,y,z,t) = f_L(X,Y,Z,t)$, kun $x = \aleph_x(X,Y,Z,t)$, $y = \aleph_y(X,Y,Z,t)$ ja $z = \aleph_z(X,Y,Z,t)$

Ainederivaatta $\dfrac{Df}{Dt} = \dfrac{\partial f_L}{\partial t} = \dfrac{\partial f_E}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla f_E$, $F = \int_\Omega f dV \Rightarrow \dfrac{DF}{Dt} = \int_\Omega \dfrac{\partial f}{\partial t}dV + \int_{\partial\Omega} f\vec{v}\cdot\vec{n}dA$

PERUSLAIT (kappaleelle)

Massan tase $\dfrac{Dm}{Dt} = 0$, $\rho^\circ = J\rho$, $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$

Liikemäärän tase $\frac{D\vec{p}}{Dt}=\vec{F}$, $\rho^{\circ}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\vec{\sigma}+\vec{f}$, $\rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v})=\nabla\cdot\vec{\sigma}+\vec{f}$

Liikemäärän momentin tase $\frac{D\vec{L}}{Dt}=\vec{M}$, $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}_{\mathrm{c}}$

Energian tase $\frac{D(U+K)}{Dt}=P_Q+P_W$, $\rho^{\circ}\frac{\partial e}{\partial t}=\vec{\sigma}:\vec{d}_{\mathrm{c}}+s-\nabla\cdot\vec{q}$, $\rho(\frac{\partial e}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla e)=\vec{\sigma}:\vec{d}_{\mathrm{c}}+s-\nabla\cdot\vec{q}$

MATERIAALIMALLIT

Hooken laki $\vec{\sigma}=\frac{E}{1+\nu}(\frac{\nu}{1-2\nu}\vec{I}\nabla\cdot\vec{u}+\vec{\varepsilon})$, $\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1&-\nu&-\nu\\-\nu&1&-\nu\\-\nu&-\nu&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xy}\\\varepsilon_{yz}\\\varepsilon_{zx}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2G}\begin{Bmatrix}\sigma_{xy}\\\sigma_{yz}\\\sigma_{zx}\end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\varepsilon_{zz}\end{Bmatrix}-\alpha\Delta T\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1&-\nu&-\nu\\-\nu&1&-\nu\\-\nu&-\nu&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\end{Bmatrix},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

Newtonin neste $\vec{\sigma}=-p\vec{I}+2\mu\vec{d}$, $\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\end{Bmatrix}=-p\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}+2\mu\begin{Bmatrix}d_{xx}\\d_{yy}\\d_{zz}\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}\sigma_{yx}\\\sigma_{zy}\\\sigma_{xz}\end{Bmatrix}=2\mu\begin{Bmatrix}d_{xy}\\d_{yz}\\d_{zx}\end{Bmatrix}$

Fourierin lämmönjohtumislaki $\vec{q}=-\vec{k}\cdot\nabla T$, $q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x}$, $q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y}$, $q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$

LINEAARINEN-ELASTISUUS

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+f_x=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}+f_y=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+f_z=0$$

Tasopalkki $\frac{dN}{dx}+f_x=0$, $\frac{dQ}{dx}+f_z=0$, $\frac{dM}{dx}-Q=0$, $N=EA\frac{du}{dx}$, $M=-EI\frac{d^2w}{dx^2}$

NAVIER-STOKES

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,\quad \rho(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2})+f_x,$$

$$\rho(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2})+f_y,$$

$$\rho(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2})+f_z$$

Sylinterikoordinaatisto $\rho v_\phi^2\frac{1}{r}=\frac{\partial p}{\partial r}$, $\mu\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\phi))=0$, $-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}v_z)+f_z=0$

LÄMPÖYHTÄLÖ

$$\rho c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t}=k(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2})+s,\quad \rho c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t}=k(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2})+s$$