

MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto)

Turunen

Keskiviikko 20.12.2017, klo 13:00–16:00

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja kirjallisuus kielletty.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos \widehat{s} , kun

$$s(t) = 3\pi e^{-6\pi|t|}.$$

Sievennä tulos reaaliseksi. Huomaa, että pitää laskea erikseen $\widehat{s}(0)$ ja $\widehat{s}(\nu)$, kun $\nu \neq 0$. Hahmottele funktioiden s ja \widehat{s} kuvaajat.

2. Tarkastellaan analogista 1-jaksollista signaalia $Ps : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, jolle

$$Ps(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - k),$$

missä $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on analoginen jaksoton signaali. Näytä, että Fourier-kerroinmuunnos $\widehat{Ps} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ toteuttaa kaavan

$$\widehat{Ps}(\nu) = \widehat{s}(\nu).$$

3. Miten määritellään digitaalisen jaksottoman signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin ajan Fourier muunnos \widehat{s} (eli DTFT)? Näytä, että $\widehat{\widehat{s}}(t) = s(-t)$.
4. Tarkastellaan diskreettejä N -jaksollisia signaaleja $r, s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Miten määritellään diskreetti Fourier-muunnos \widehat{s} ja sisätulo $\langle r, s \rangle$? Entä mikä on nyt diskreetti Fourier-käänteismuunnos eli kuinka s saadaan palautettua, jos tunnetaan \widehat{s} ?

b) Näytä, että

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = c_N \langle r, s \rangle$$

eräällä luvulla $c_N > 0$, joka riippuu jaksonpituudesta N .