ELEC-A7200 Signaalit ja järjestelmät

Syksy 2017, T01

14.12.2017

- 1. välikokeen uusinta: tehtävät 1-3
- 2. välikokeen uusinta: tehtävät 4-6
- Tentti: tehtävät 1-6

Tehtävä 1

a) (2p.) Olkoot $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ ortonormaaleja energiasignaaleja. Ratkaise

$$\langle \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), x_1(t) \rangle \quad \text{ja} \quad \langle \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), x_2(t) \rangle$$

kun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

b) (2p.) Olkoon

$$x_3(t) = \begin{cases} 2+t, & -2 \leq t < -1 \\ 1 & -1 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Esitä signaali $x_4(t) = \frac{dx_3(t)}{dt}$ muotoa rect $\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ olevien kanttipulssien avulla, missä

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Piirrä signaalien $x_3(t)$ ja $x_4(t)$ kuvaajat.

c) (2p.) Ratkaise

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)\, \delta(t-T)\, dt,$$

missä $\delta(t)$ on Diracin deltafunktio ja $T \in \mathbb{R}$.

d) (4p.) Olkoon $x_5(t) = e^{-t}u(t)$, missä $u(t)$ on yksikköaskelfunktio:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ratkaise signaalin $x_5(t)$ konvoluutio itsensä kanssa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_5(\tau) x_5(t-\tau)\, d\tau.$$

Vinkki: Kannattaa piirtää kuva.

Tehtävä 2

Tarkastellaan jaksollista signaalia $x(t) = 2\cos(20\pi t) + \cos(10\pi t)$.

a) (1p.) Mikä on signaalin $x(t)$ jakso T_0 ja mitä taajuuksia signaali sisältää?

b) (3p.) Määritä signaalin eksponentiaalisen Fourier-sarjan kertoimet:

$$x_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt.$$

Vinkki: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$

c) (2p.) Piirrä signaalin kaksipuoleinen amplitudi- ja vaihespektri.

d) (2p.) Piirrä signaalin yksipuoleinen tehospektri.

e) (2p.) Mikä on signaalin keskimääräinen teho?

Tehtävä 3

Tarkastellaan pulssia

$$x(t) = \begin{cases} 2+t, & -2 \le t < -1 \\ 1 & -1 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

a) (2p.) Ratkaise pulssin $x(t)$ energia

b) (4p.) Ratkaise signaalin Fourier-muunnos $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ sekä energiaspektritiheys $|X(f)|^2$.

c) (4p.) Erään pulssin $y(t)$ Fourier-muunnos on $Y(f) = x(f)$. Ratkaise pulssin $y(t)$ lauseke.

Tehtävä 4

Tarkastellaan signaalia $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$, missä $f_1 = 1$ kHz ja $f_2 = 50$ kHz.

a) (2p.) Signaalista otetaan näytteitä taajuudella $f_s = 90$ kHz. Mitä taajuuksia näytteistetty signaali sisältää?

b) (2p.) Mikä pitäisi näytteenottotaajuuden f_s olla, jotta laskostumista (aliasoinita) ei tapahtuisi?

c) (2p.) Kuinka monta näytettä N signaalista pitää ottaa, jotta niistä nopealla Fourier-muunnoksella (FFT) lasketun spektrin taajuusresoluutio olisi 100 Hz, kun näytteenottotaajuus $f_s = 1$ kHz?

d) (4p) Signaali $x(t)$ kulkee tehovahvistimen läpi, jonka toimintaa kuvaa 3. asteen polynomi: $y(t) = x(t) - 11x^3(t)$. Mitä taajuuksia vahvistettu signaali $y(t)$ sisältää?

Tehtävä 5

(10p) Butterworth-alipäästösuodattimen amplitudifunktio on

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{W}\right)^{2n} + 1}}$$

missä W on suodattimen puolentehon kaistanleveys ja n on sen kertaluku. Suunnittele suodatin, eli määritä W ja n, siten, että suodattimen vaimennus päästökaistalla (0 - 50 kHz) on enintään 3 dB ja vaimennus estokaistalla ($f \geq 200\,\text{kHz}$) on vähintään 60 dB.

Tehtävä 6

Erään kaistarajoitetun satunnaissignaalin $\tilde{x}(t)$ kaksipuoleinen spektritiheys on

$$S_{xx}(f) = 100 \cdot \text{tria}(f)$$

missä

$$\text{tria}(f) = \begin{cases} 1+f, & -1 \leq f < 0 \\ 1-f, & 0 \leq f \leq 1 \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Signaalin kaistanleveys on $B = 1$ Hz.

Signaaliin summautuu valkoista kohinaa $\tilde{z}(t)$, jonka kaksipuoleinen spektritiheys on

$$S_{zz}(f) = 1 \quad \forall f$$

Oleta, että $\tilde{z}(t)$ ja $\tilde{x}(t)$ ovat ortogonaaisia stokastisia prosesseja $\mathsf{E}\{\tilde{z}(t)\tilde{x}(t+\tau)\} = 0 \quad \forall \tau$.

a) (2p.) Ratkaise signaalin $\tilde{x}$ tehon odotusarvo $P_s = \mathsf{E}\{|\tilde{x}(t)|^2\}$.

b) (2p.) Ratkaise kohinan tehon odotusarvo signaalin kaistalla $P_N = \int_{-B}^{B} S_{zz}(f)df$.

c) (2p.) Ratkaise signaali-kohinasuhde $\frac{P_S}{P_N}$.

b) (4p.) Ratkaise signaalin $\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{z}(t)$ tehospektri $S_{yy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{yy}(\tau)e^{-j2\pi\tau f}d\tau$.