Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kurki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3
MS-A0303 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 5.4.2017 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Origokeskisen R-säteisen pallon $B(R)$ lämpötila laskee keskipisteestä mitatun etäisyyden funktiona keskipisteen arvosta 100 pinnan arvoon 0 muodossa
$$T = T(r) = 100(1 - r^2/R^2), \ 0 \le r \le R.$$
Laske pallon keskilämpötila
$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_{B(R)} T \, dV.$$

2. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, kun $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
a) Osoita, ettei vektorikentällä $\mathbf{F}$ ole skalaaripotentiaalia.
b) Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ viivaintegraali pitkin umpinaista käyrää C, joka
(i) kulkee ensin pisteestä $(1, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 0, 2\pi)$ pitkin ruuviviivaa (Helix-käyrä) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$,
(ii) palaa sitten pisteestä $(1, 0, 2\pi)$ suoraan alas pisteeseen $(1, 0, 0)$.

3. Olkoon $D \subset \mathbf{R}^2$ suunnikas, jonka kärjet ovat pisteissä $(-2, -1)$, $(3, -1)$, $(6, 3)$ ja $(1, 3)$. Päättele symmetrian perusteella suunnikkaan D keskiön koordinaatit ja laske sen jälkeen Greenin kaavan avulla viivaintegraali
$$\oint_{\partial D} \left(3y^2 + 2xe^{y^2}\right) dx + 2x^2ye^{y^2} \, dy.$$

4. Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vuo pinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (yksikköpallo) läpi, kun positiivinen suunta on ulospäin.

5. Olkoot $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia skalaarikenttiä.
a) Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että
$$\nabla \times (f\nabla g + g\nabla f) = \overline{0}.$$
b) Olkoon lisäksi $\Delta f = \Delta g = 0$. Osoita (joko suoraan laskemalla tai nabla-kaavoja käyttämällä), että
$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = 0.$$

Käännä!

6. Olkoot $R > r$ vakioita. Torus on (auton sisärenkaan tai munkkirinkilän muotoinen) pinta, joka syntyy r-säteisen ympyrän keskipisteen kiertäessä R-säteisen ympyrän kehän; vrt. kuvio. Toruksella on parametrisointi

$$\mathbf{r}(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u),$$

kun $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$. Osoita, että parametrisoinnin pinta-alan suurennussuhde on $r(R + r\cos u)$ ja että toruksen pinta-ala on muotoa $2\pi r \cdot 2\pi R$. (Erikoistapaus Pappuksen lauseesta)

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

- $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$, $\nabla \times (a\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$, $a, b \in \mathbf{R}$
- $\nabla \times \nabla f = \overline{0}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$, $\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$
- $\overline{x} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint x\,dA$, $\overline{y} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\iint y\,dA$
- $\displaystyle\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\displaystyle\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$
- $\displaystyle\iint_P (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r, φ, θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- (ρ, θ, z): $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

1. $$\iiint_{B(R)} T\,dV = 100\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\left(1-r^2/R^2\right)\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 100\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{R}\left(r^2-r^4/R^2\right)dr = 400\pi\Big/_0^{R}\left(\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{5R^2}r^5\right)$$

$$= \frac{800\pi}{15}R^3 = \frac{160\pi}{3}R^3$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{160\pi R^3/3}{4\pi R^3/3} = \underline{\underline{40}}$$

3. Kuvio $\Rightarrow (\bar{x},\bar{y}) = (2,1)$

$$\oint_{\partial D}\left(3y^2+2xe^{y^2}\right)dx + 2x^2ye^{y^2}dy$$

$$= \iint_D\left(\cancel{4xye^{y^2}} - 6y - \cancel{4xye^{y^2}}\right)dA$$

$$= -6\iint_D y\,dA = -6\cdot\bar{y}\cdot A = -6\cdot 1\cdot 20 = \underline{\underline{-120}}$$

2. a) $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -1 \neq 1 = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ $\Rightarrow$ ei skalaripotentiaalia

b) C_1: $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \Rightarrow \bar{r}'(t) = -\sin t\,\bar{i} + \cos t\,\bar{j} + \bar{k}$

$\bar{F}(\bar{r}(t)) = +\sin t\,\bar{i} - \cos t\,\bar{j} + \bar{k} \Rightarrow \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t) = -1+1 = 0$

$$\Rightarrow \int_{C_1}\bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$$

C_2: $\bar{r}(t) = (1, 0, 2\pi - t)$, $0 \le t \le 2\pi \Rightarrow \bar{r}'(t) = -\bar{k}$, $\bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t) = -$

$$\int_{C_2}\bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi}(-1)\,dt = -2\pi \Rightarrow \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0 - 2\pi = \underline{\underline{-2\pi}}$$

4. Voi laskea suoraankin, mutta helpompi Gaussin lauseen avulla:

$$\nabla \cdot \bar{F} = 1 + 2y + 3z^2$$

$$B = \{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

$$\Rightarrow \iiint_B \nabla \cdot \bar{F} \, dV = \iiint_B (1 + 2y + 3z^2) \, dV$$

$$= \underbrace{\iiint_B 1 \, dV}_{4\pi/3} + 2 \underbrace{\iiint_B y \, dV}_{=0 \text{ (SYMMETRIA)}} + 3 \iiint_B z^2 \, dV \qquad z = r \cos\varphi$$

$$\iiint_B z^2 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r^4 \, dr = 2\pi \Big/_0^{\pi} \left(-\frac{1}{3} \cos^3\varphi \right) \cdot \Big/_0^1 \frac{1}{5} r^5$$

$$= \frac{2\pi}{15} \left(-\cos^3\pi + \cos^3 0 \right) \cdot 1 = \frac{4\pi}{15}$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial B} \bar{F} \cdot \bar{n} \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_B \nabla \cdot \bar{F} \, dV = \frac{4\pi}{3} + 3 \cdot \frac{4\pi}{15} = \underline{\underline{\frac{32\pi}{15}}}$$

6. $\bar{r}_u = -r\sin u\cos v\,\bar{i} - r\sin u\sin v\,\bar{j} + r\cos u\,\bar{k}$

$$\bar{r}_v = -(R+r\cos u)\sin v\,\bar{i} + (R+r\cos u)\cos v\,\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -(R+r\cos u)\sin v & (R+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -r(R+r\cos u)\cos u\cos v\,\bar{i} - r(R+r\cos u)\cos u\sin v\,\bar{j}$$

$$- r(R+r\cos u)\sin u\underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1}\bar{k}$$

$$\Rightarrow \|\bar{N}\|^2 = r^2(R+r\cos u)^2\cos^2 u\underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1} + r^2(R+r\cos u)^2\sin^2 u$$

$$= r^2(R+r\cos u)^2 \Rightarrow \|\bar{N}\| = \underline{\underline{r(R+r\cos u)}}$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\bar{N}\|\,du\,dv = 2\pi r\int_0^{2\pi}(R+r\cos u)\,du = \underline{\underline{2\pi r\cdot 2\pi R}}$$

5. a) $\nabla\times(f\nabla g + g\nabla f) = \nabla f\times\nabla g + f\underbrace{\nabla\times\nabla g}_{=\bar{0}} + \nabla g\times\nabla f + g\underbrace{\nabla\times\nabla f}_{=\bar{0}}$

$$= \nabla f\times\nabla g - \nabla f\times\nabla g = \underline{\underline{\bar{0}}}$$

b) $\nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f) = \nabla f\cdot\nabla g + f\underbrace{\Delta g}_{=0} - \nabla g\cdot\nabla f - g\underbrace{\Delta f}_{=0}$

$$= \nabla f\cdot\nabla g - \nabla f\cdot\nabla g = \underline{\underline{0}}$$