Aalto-yliopiston sähkötekniikan korkeakoulu | TENTTI
Tietoliikenne- ja tietoverkkotekniikan laitos | 12.03.2018

ELEC-C7220 Informaatioteoria

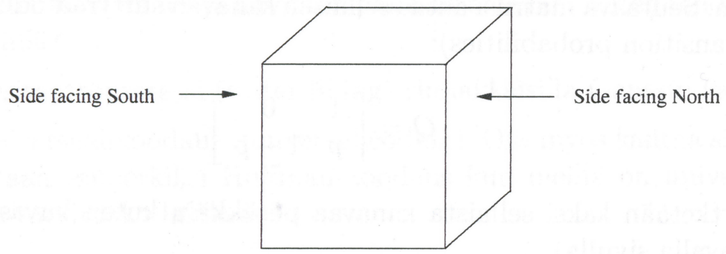
1. (7p.) Entropia. Olkoon muuttuja X arpakuution (jonka kuudella sivulla siis on luvut 1–6) heiton tulos. Heitot tapahtuvat niin, että yksi sivu osoittaa aina pohjoiseen. Olkoon Y heiton tulos pohjoisella sivulla ja Z heiton tulos eteläisellä sivulla (kuva 1).

   (a) Laske $H(X)$ ja $H(Y)$.

   (b) Laske $I(X;Y)$.

   (c) Laske $H(Y,Z)$ ja $I(Y;Z)$.

   (d) Voivatko vastaukset olla eri jos arpakuution sivuilla on muita lukuja kuin 1–6? Vastaa kun (i) kaikilla sivuilla on eri luku, (ii) vähintään kahdella sivulla on sama luku. Perustele (mutta ei tarvitse laskea auki).



Kuva 1: Arpakuutio

2. (6p.) Lähdekoodaus. Opettaja on pyytänyt opiskelijoita kirjoittamaan tietokoneohjelman, joka mahdollisimman tehokkaasti kompressoi erään lähteen symbolit binäärijonoon. Lähteen aakkosto on $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ ja todennäköisyydet $p(A) = 0.03, p(B) = 0.11, p(C) = 0.13, p(D) = 0.04, p(E) = 0.22, p(F) = 0.28$ ja $p(G) = 0.19$. Tehtävänannossa on pyydetty kompressoimaan merkkijono AGEEA.

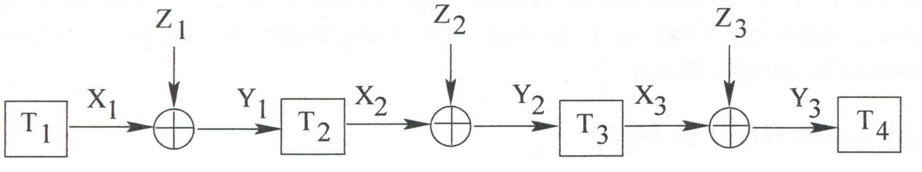
   Kaikki Kalle-Petterin kaverit käyttävät tähän Huffman-koodausta, mutta Kalle-Petteri keksii, että hän saa paremman tuloksen seuraavalla tavalla: merkkijono AGEEA koodataan pelkällä 0:lla ja kaikki muut merkkijonot koodataan niin, että ensin tulee 1 ja sen jälkeen jono Huffman-koodattuna. Opettaja arvasi kuitenkin etukäteen, että fiksut opiskelijat saattavat keksiä tämäntyyppisen ratkaisun, ja vaatii tehtäväpalautuksen yhteydessä, että ohjelma on ajettava myös muilla merkkijonoilla ja ratkaisu arvostellaan ohjelman tuottamien kompressoitujen jonojen pituuksien keskiarvon mukaan. Montako muuta merkkijonoa AGEEA:n lisäksi opettajalla pitää vähintään olla jotta Kalle-Petterin temppu ei kannattaisi?

JATKUU SEURAAVALLA SIVULLA

3. (5p.) Kanavan kapasiteetti.

(a) Kurssin vanhoissa tenteissä on ollut seuraavanlaisia tehtäviä:

- **Tyyppi 1:** Tarkastellaan kuvan 2 tietoliikennekanavaa, joka koostuu kolmesta peräkkäisestä Gaussin kanavasta.



Kuva 2: Peräkkäiset kanavat

Terminaali T_i, $i = 2, 3, 4$ vastaanottaa signaalin Y_{i-1}, dekoodaa sen ja (tarvittaessa) koodaa sen lähetystä varten...

- **Tyyppi 2:** Z-kanavan kapasiteetti vaihtotodennäköisyydellä (crossover probability) p on $\log_2\left(1 + (1-p)p^{p/(1-p)}\right)$ bittiä lähetystä kohden. Seuraava matriisi antaa sellaisen kanavan siirtymätodennäköisyydet (transition probabilities):

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

Kytketään kaksi sellaista kanavaa peräkkäin kuten kuvassa 3 (seuraavalla sivulla)...

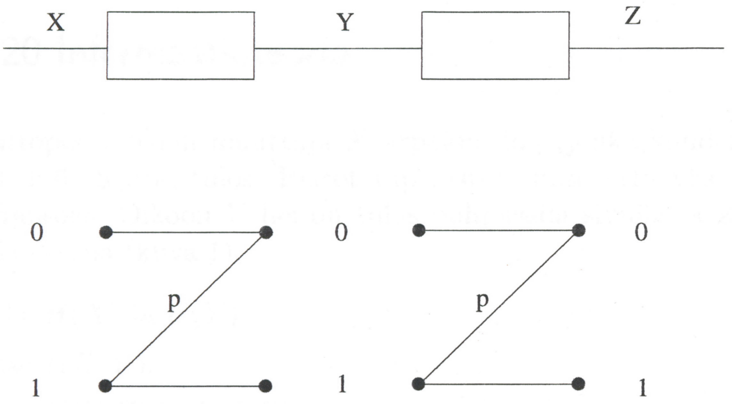
Molemmissa tapauksissa on kyse peräkkäisistä kanavista, mutta niissä on merkittävä ero yleisellä tasolla, joka myös vaikuttaa kapasiteetin laskentaan. Mikä on tämä ero? (Yleisellä tasolla tarkoitan, ettei ero liity yksittäisiin kanaviin, jotka esimerkiksi 2.-tapauksessa voisivat olla binäärinen symmetrinen kanava (BSC) Z-kanavan sijasta, eikä niiden tyyppiin (diskreetti/jatkuva).)

Kerro myös yleisellä tasolla miten kapasiteetti (kun lähetys tapahtuu kaikkien peräkkäisten kanavien yli) lasketaan näissä kahdessa tapauksessa. (Yleisellä tasolla tarkoitan, etten kaipaa matemaattisia lausekkeita ja että menetelmä toimisi myös muunlaisilla yksittäisillä kanavilla. Jos et heti osannut vastata ensimmäiseen kysymykseen ymmärrät kyllä tässä vaiheessa mitä ajan takaa.)

(b) Esitä Gaussin kanavan kapasiteetin kaava.

(c) Esitä kaistarajoitetun Gaussin kanavan kapasiteetin kaava.

JATKUU SEURAAVALLA SIVULLA



Kuva 3: Peräkkäiset Z-kanavat

4. (6p.) Sovellukset. Selitä kattavasti mutta tiiviisti seuraavat asiat.

   (a) Miten häviöllinen ja häviötön pakkaus eroavat? Miten tehdä valinta näiden välillä?

   (b) Vesitäyttöprosessi (water-filling) rinnakkaisilla Gaussin kanavilla.

   (c) Universaalikoodaus (universal coding). Ota myös kantaa siihen miksi tarvitaan esimerkiksi Huffman-koodaus kun meillä on universaalikoodaus, vai tarvitaako lainkaan?