Aalto-yliopisto

MS-C1342 Lineaarialgebra, 2018/V

Loppukoe/Tentti, tiistai 22.5.2018, 9.00–12.00

Sinulla on kaksi vaihtoehtoa:

- Ratkaise tehtävät 1–4. Tällöin kurssin arvosana määräytyy laskuharjoitustehtävien ja kokeen perusteella.
- Ratkaise tehtävät 3–6. Tällöin kurssin arvosana määräytyy pelkän kokeen perusteella.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (i) Määritä kannat aliavaruuksille $R(A)$, $R(B)$ ja $N(C)$.

   (ii) Määritä kannat ortogonaalikomplementeille $R(A)^\perp$, $R(B)^\perp$ ja $N(C)^\perp$ (euklidisen sisätulon suhteen).

2. Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ singulaariarvohajotelma

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T.$$

   (i) Määritä ortonormaalit kannat avaruuksille $R(A)$ ja $N(A)$. Mikä on $\operatorname{rank}(A) = \dim(R(A))$?

   (ii) Määritä vekorit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ siten, että

$$A = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T.$$

   (iii) Etsi kaikki yhtälöryhmän

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   ratkaisut.

3. (i) Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \pi & \alpha \\ \alpha & \sqrt{2018} \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Mitkä matriiseista A_1, A_2 ja A_3 ovat diagonalisoituvia?

   (ii) (a) Onko funktio $\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \mapsto |x_1| \in \mathbb{R}$ normi?

(b) Onko funktio $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \in \mathbb{R}$ sisätulo?

(c) Onko funktio $\mathbb{R}^{n\times n} \ni A \mapsto |\det(A)|^{1/n} \in \mathbb{R}$ matrisiinormi?

Perustele vastauksesi.

4. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Laske aliavaruudelle $R(A)$ ortonormaali kanta käyttämällä Gram–Schmidt prosessia (euklidisen sisätulon suhteen).

(ii) Muodosta ortogonaaliprojektio $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aliavaruudelle $R(A)$.

(iii) Olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ja olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ lausekkeen
$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$$
minimoija. Näytä, että vektorin $\mathbf{x}$ täytyy toteuttaa yhtälö $A\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, missä P on ortogonaaliprojektio aliavaruudelle $R(A)$.

5. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Määritä kannat aliavaruuksille $R(A)$, $R(B)$ ja $N(C)$.

(ii) Määritä kannat ortogonaalikomplementeille $R(A)^\perp$, $R(B)^\perp$ ja $N(C)^\perp$ (euklidisen sisätulon suhteen).

(iii) Määritä ortogonaaliset projektiomatriisit $P_{R(A)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $P_{R(B)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ja $P_{N(C)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aliavaruuksille $R(A)$, $R(B)$ ja $N(C)$.

6. Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ singulaariarvohajotelma
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T.$$

(i) Määritä ortonormaalit kannat aliavaruuksille $R(A)$, $N(A)$, $R(A)^\perp$ ja $N(A)^\perp$. Mikä on $\operatorname{rank}(A) = \dim(R(A))$?

(ii) Määritä vektorit $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ siten, että
$$A = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T.$$

(iii) Etsi kaikki yhtälöryhmän
$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
ratkaisut.

(iv) Olkoon $\mathbf{b} = [1, 0, -1]^{\mathrm{T}}$. Määritä pienimmän neliösumman tehtävän
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|A^T\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$
ratkaisut.