ELEC-E8104 Stochastic models and estimation (5 op)

Tentti/*Exam* 23.10.2018

Tentissä saa käyttää laskinta ja tentissä jaettua kaavakokoelmaa.
It is allowed to use the delivered Collection of important formulas for this course

1. a) Tarvitsetko estimoitavan parametrin jakaumaa kun lasket ML tai MAP estimaatteja?
a) Do you need the probability distribution of the estimated parameter when you compute ML or MAP estimates?
(1 p)

b) Milloin satunnaisen parametrin estimaattori on harhaton?
b) When the estimator of a random parameter is said to be unbiased?
(1 p)

c) Milloin kannattaa käyttää informaatiomuotoista Kalman suodatinta, milloin 'tavallista' formulointia ?
c) In what cases it is benificial to use Information filter, in what cases 'normal' Kalman filter?
(1 p)

d) Mikä Kalman suodattimen kaavoissa kuvaa tilaestimaatin tarkkuutta?
d) In the Kalman filter equations, what describes the accuracy of state estimate?
(1 p)

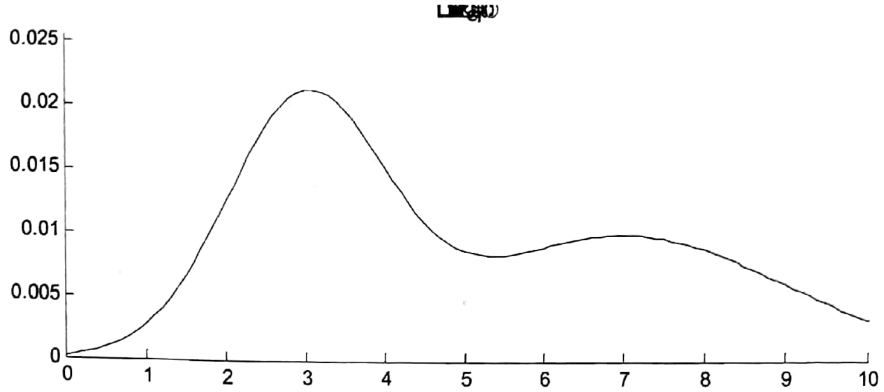
e) Jos Kalman suodin toimii oikein, millaista jakaumaa mittausresiduaali noudattaa? Mitkä ovat jakauman parametrit? Tilan estimonti virheen kovarianssia on P, mittausvirheen kovarianssi on R ja mittausyhtälön kerroinmatriisi on H.
e) If the Kalman filter is working properly, what kind of distribution the measurement residual follows? What are the parameters of the distribution? State estimation error covariance is P, measurement error covariance is R and measurement equation coefficient is H.
(1 p)

f) Miten ensimmäisen ja toisen asteen laajennetut Kalman suotimet eroavat "tavallisesta" Kalman suotimesta? Mitä riskejä on ensimmäisen tai toisen asteen laajennetun Kalman suotimen käytössä? Mitä voit sanoa optimaalisuudesta?
f)What are the differences between the first and second order extended Kalman filter and "normal" Kalman filter? What risks there are using first or second order extended Kalman filter?Are these different versions of filter optimal?
(1 p)

2. Kuvassa on todennäköisyysjakauma, joka on kahden normaalijakauman summa. Parametrit on annettu alla.
In the figure, there is a probability density function of a distribution that is a weighted sum of two Gaussian densities. The parameters are given below.

$$p(x|z) = \sum_{j=1}^{2} p_j \mathcal{N}(x; x_j, P_j)$$

$$p_1 = 0.5 \quad x_1 = 3 \quad P_1 = 1$$
$$p_2 = 0.5 \quad x_2 = 7 \quad P_2 = 2$$



Esitä kaavoja käyttäen MAP ja MMSE estimaattorit. Mitkä ovat estimaatit (estimaattorien arvot) tässä tapauksessa?
Present MAP and MMSE estimators using equations. What are the estimates (the values of the estimators) in this case?

(6 p)

3. Olkoon saatavissa kolme mittausnäytettä.
Let there be three measurements

	#1	#2	#3
input u	1	2	3
output y	3	5	6

Tunnetaan mallirakenne
The model structure is known

$$y = a * u + b$$

Kirjoita mittaukset matriisimuotoon z=H*x ja estimoi tuntemattomat parametrit a ja b matriisimuotoisella pienimmän neliösumman ei-rekursiivisella menetelmällä. Kaikilla mittauksilla on sama painoarvo.
*Write the measurements in matrix form z=H*x and estimate in matrix form the unknown parameters a and b using least squares non-recursive algorithm. All measurements have the same weight.*

(6 p)

4. Hissin paikka, nopeus ja kiihtyvyys voidaan mitata. Paikan mittausvirheen keskihajonta on 0.1 m, nopeuden mittausvirheen keskihajonta on 0.03 m/s ja kiihtyvyyden mittausvirheen keskihajonta 0.01 m/s^2. Kiihtyvyyden muutos nopeuden keskihajonta on 1 m/s^3. Näyteväli on 0.01 s.
We can measure the position, velocity and acceleration of an elevator. Standard deviation of position measurement error is 0.1 m. Standard deviation of velocity and acceleration measurement errors are 0.03 m/s and 0.01 m/s^2, *respectively. The standard deviation of acceleration change is of 1* m/s^3. *The sample time is 0.01 s.*

a) Kirjoita jatkuva-aikainen tila yhtälö ja diskreetti mittaus yhtälö kaksitilaiselle Kalman suotimelle. Kirjoita myös kovarianssit tila- ja mittausyhtälöiden virheille.
Write the continuous time state and discrete time measurement equation for a two state Kalman filter. Write also equations for state and measurement error covariance.

(3 p)

b) Kirjoita jatkuva-aikainen tila ja diskreetti mittaus yhtälöt kolmitilaiselle Kalman suotimelle. Kirjoita myös kovarianssit tila ja mittausyhtälöiden virheille.
Write the continuous time state and discrete time measurement equation for a three state Kalman filter. Write also covariance equations for state and measurement error covariance.

(3 p)

5. Kirjoita mittausyhtälöt sekä tilayhtälöt ottaen huomioon yhden syklin viive yhdessä mittauksessa. Diskretoi tilayhtälö. Laske tilayhtälön sekä mittausyhtälön osittaisderivaatat tilan komponenttien suhteen.
Write measurent equations and state equations taking in account that there is one cycle delay in one measurement. Discretize the state equation. Compute partial derivates of state and measurement equations relative to state components

$$\dot{x}_1 = x_4 \cos(x_3) + w_1$$
$$\dot{x}_2 = x_4 \sin(x_3) + w_2$$
$$\dot{x}_3 = x_4 \frac{\tan\alpha}{a} + w_3$$
$$\dot{x}_4 = w_4$$

jossa α ohjauskulma. Paikka mitataan GPS-vastaanottimella kulmaminuutteina ja suunta asteina sähkökompassilla, joiden mittausvirhe oletetaan nollakeskiarvoiseksi ja gaussiseksi. Kaikki mittaukset saadaan CAN-väylältä 100 ms välein. Sähkökompassin mittaus on kuitenkin viivästynyt yhden syklin verran. Kulmaminuutti on matkana 1852 m latitudin suuntaan.
As inputs, α *is the steering angle. The position is measured with an GPS as angle minutes and the heading as degrees with electric compass. The measurements are disturbed with Gaussian distributed noise. All measurements are read from a CAN-bus with 100 ms intervals. However, the compass measurement is one cycle delayed. Angle minute is 1852 m in latitude direction.*

Diskretoinnin voi tehdä Eulerin menetelmällä, jonka voi johtaa suoraan derivaatan määritelmästä *The system can be discretized with Euler method, which can reasoned on the basis of definition of derivative.*

$$\dot{x} = f(x,u,t) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}.$$

(6 p)

Equations:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{(a*b-c*c)} \begin{pmatrix} b & -c \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$x_{ML}(Z) = \arg_{max}(p(Z|x))$

$x_{MAP}(Z) = \arg_{max}(p(x|Z))$

$x_{MMSE}(Z) = E[x|Z]$

Equation collection, can be used in the exam.

$$(P^{-1} + H'R^{-1}H)^{-1} = P - PH'(HPH' + R)^{-1}HP \qquad (1.3.3\text{-}11)$$

where P is $n \times n$, H is $m \times n$, and R is $m \times m$.

An alternative version of the above is

$$(A + BCB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(B'A^{-1}B + C^{-1})^{-1}B'A^{-1} \qquad (1.3.3\text{-}12)$$

$$f_x(x) \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} = [\nabla_x f(x)']' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (1.3.5\text{-}3)$$

$$\phi_{xx}(x) \triangleq \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \nabla_x \nabla_x' \phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (1.3.5\text{-}6)$$

Define the ***stacked vector***

$$y \triangleq \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \qquad (3.2.1\text{-}1)$$

The notation

$$y \sim \mathcal{N}[\bar{y}, P_{yy}] \qquad (3.2.1\text{-}2)$$

will indicate that the variable y is ***normally (Gaussian) distributed*** with mean

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \qquad (3.2.1\text{-}3)$$

and covariance matrix (assumed nonsingular)

$$P_{yy} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix} \qquad (3.2.1\text{-}4)$$

For x and z *jointly Gaussian*, as assumed in (3.2.1-2), the ***conditional mean*** is

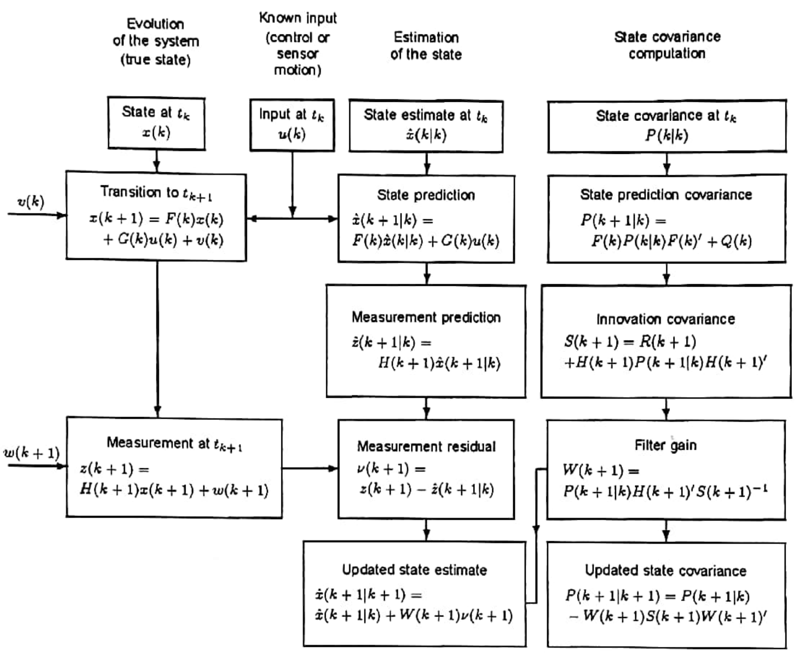
$$\boxed{\hat{x} \triangleq E[x|z] = \bar{x} + P_{xz}P_{zz}^{-1}(z - \bar{z})} \tag{3.2.1-7}$$

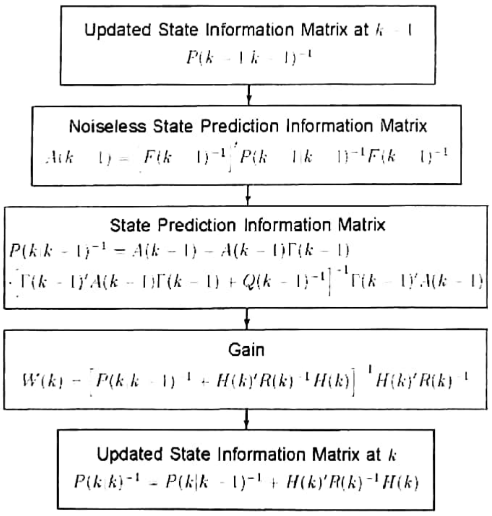
and the corresponding ***conditional covariance matrix*** is

$$\boxed{P_{xx|z} \triangleq E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})'|z] = P_{xx} - P_{xz}P_{zz}^{-1}P_{zx}} \tag{3.2.1-8}$$

$$\boxed{\hat{x}(k) = [H^{k'}(R^k)^{-1}H^k]^{-1}H^{k'}(R^k)^{-1}z^k} \tag{3.4.1-9}$$

$$\boxed{P(k) = [H^{k'}(R^k)^{-1}H^k]^{-1}} \tag{3.4.1-15}$$





Information filter state prediction

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{y}(k|k-1) = (F(k-1)')^{-1}\{I - P(k-1|k-1)^{-1}F(k-1)^{-1}\Gamma(k-1) \\ \cdot[\Gamma(k-1)'A(k-1)\Gamma(k-1) + Q(k-1)^{-1}]^{-1} \\ \cdot\Gamma(k-1)'(F(k-1)')^{-1}\hat{y}(k-1|k-1)\end{aligned}} \tag{7.2.3-6}$$

Information filter state update

$$\boxed{\hat{y}(k|k) = \hat{y}(k|k-1) + H(k)'R(k)^{-1}z(k)} \tag{7.2.3-8}$$

$$\boxed{\hat{x}(k|N) = \hat{x}(k|k) + C(k)[\hat{x}(k+1|N) - \hat{x}(k+1|k)]} \qquad (8.6.2\text{-}16)$$

where the ***smoother gain*** is

$$C(k) = P(k|k)F(k)'[F(k)P(k|k)F(k)' + Q(k)]^{-1} \qquad (8.6.2\text{-}17)$$

or

$$\boxed{C(k) = P(k|k)F(k)'P(k+1|k)^{-1}} \qquad (8.6.2\text{-}18)$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(k|N) = P(k|k) + C(k)[P(k+1|N) \\ -P(k+1|k)]C(k)' \qquad k = N-1, \ldots, 0 \end{aligned}} \qquad (8.6.2\text{-}29)$$