Aalto University
School of Science

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka
Tentti 20.12.2016

1. Vastaa lyhyesti, mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
   a) Mitä tarkoitetaan stationäärisellä tilalla?
   b) Mitä kvanttimekaniikassa tarkoitetaan systeemin perustilalla?
   c) Osoita, että ei-degeneroituneessa tapauksessa Hermittiisen operaattorin ominaisarvot ovat reaalisia ja ominaistilat ortogonaalisia.
   d) Mitä on tunneloituminen?
   e) Mitä tarkoitetaan superpositiotilalla?
   f) Mikä on Blochin aaltofunktio?

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq L$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ortonormeeratut ominaisfunktiot ja -arvot ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \quad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

   a) Oletetaan, että hiukkasen aaltofunktio ajanhetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(x) - i\phi_3(x)\right]. \tag{2}$$

   Mikä on aaltofunktion aikariippuvuus $\Psi(x, t)$? Entä mikä on paikan odotusarvo $\langle x \rangle$ (ajan funktiona)? (3 p.)

   b) Oletetaan yleinen aaltofunktio, joka on ajanhetkellä $t = 0$

$$\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \phi_n(x). \tag{3}$$

   Minä ajanhetkenä aaltofunktio palaa takaisin tähän alkutilaan? (3 p.)

   Apuna:

   - Symmetriat...
   - $\int_0^1 dy \; y \sin[n\pi y] \cos[m\pi y] = [2(-1 + (-1)^{m+n})\, mn] / \left[\pi^2 (m-n)^2 (m+n)^2\right]$

KÄÄNNÄ SIVUA

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{4}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Osoita, että Hamiltonin operaattori on $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$. (3 p.)

b) Laske $\langle x\rangle$ ja $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ tilalle $|\psi(t=0)\rangle = i/\sqrt{3}|0\rangle + \sqrt{2/3}|2\rangle$, missä $|n\rangle$ on harmonisen oskillaattorin energian ominaistila. (3 p.)

Apuna:

- $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

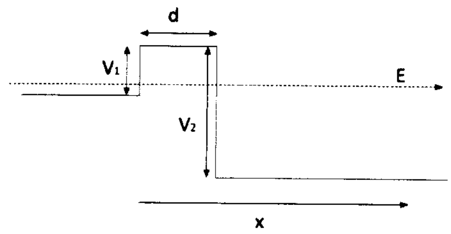
4. a) Johda operaattorin $\hat{A}$ odotusarvon aikakehitykselle lauseke

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle, \tag{5}$$

missä $\hat{H}$ on Hamiltonin operaattori. (3 p.)

b) Jos $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$, laske $d\langle\hat{x}\rangle/dt$? ($x$ on paikka ja p on liikemäärä) (2 p.)

c) Ovatko x^2 tai p^2 liikevakiota vapaalle hiukkaselle? Perustelut. (1 p.)



5. Tarkastellaan hiukkasen sirontaa oheisen kuvan mukaisesta potentiaalista. Hiukkanen, jonka massa on m ja jolla on hyvin määrätty energia E, tulee vasemmalta. Oletetaan, että energia E on pienempi kuin vallin korkeus V_1.

a) Kirjoita sirontaongelman yriteaaltofunktio kussakin avaruuden osassa. (2 p.)

b) Kirjoita yhtälöryhmä, jonka ratkaisemalla saat määriteltyä kohdan a) tuntemattomat parametrit. (2 p.)

c) Miten laskisit hiukkasen läpäisykertoimen? (Ei siis tarvitse ratkaista yhtälöryhmää vaan kertoa kuinka läpäisykertoimen saa, kun ratkaisu tunnetaan.) (2 p.)

Apuna: todennäköisyysvirrantiheys yhdessä ulottuvuudessa

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\psi^*}{dx}\right] \tag{6}$$

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.