Aalto University
School of Science

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka
Tentti 19.12.2017

---

1. Vastaa lyhyesti, mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
   a) Mitä tarkoitetaan degeneraatiolla?
   b) Mitä kvanttimekaniikassa tarkoitetaan systeemin perustilalla?
   c) Mitä tarkoitetaan superpositiotilalla?
   d) Mitä tarkoitetaan kahden kvanttimekaanisen tilan ortogonaalisuudella?
   e) Mitä tarkoitetaan mittauspostulaatilla?
   f) Hermiittiset operaattorit ja miksi ne ovat kvanttimekaniikassa tärkeitä?

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq L$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ortonormeeratut ominaisfunktiot (välillä $0 \leq x \leq L$) ja -arvot ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \quad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

a) Miksi Hamiltonin operaattorin (eli energian) ominaisarvot ja -tilat ovat kuten yllä? (2p.)
(Vihje: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.) -

$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ $\Rightarrow -\cos 2x + 1 = 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

b) Oletetaan, että hiukkasen tilafunktio ajanhetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x, 0) = C\left[\phi_1(x) - i\phi_3(x)/3\right]. \tag{2}$$

Määritä kerroin C ja ratkaise hiukkasen tila $\Psi(x, t)$ ajanhetkellä t. (2 p.)

c) Mitkä ovat mahdollisia energian mittaustuloksia ja millä todennäköisyydellä nämä tulokset saadaan? Mikä on energian mittauksen odotusarvo $\langle \hat{H} \rangle$? (2 p.)

KÄÄNNÄ SIVUA

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa potentiaali on siis $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{3}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Käyttäen $\hat{x}$:n ja $\hat{p}$:n peruskommutaatiorelaatiota johda kommutaatiorelaatio $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. (1p.)

b) Lausu harmonisen oskillaattorin Hamiltonin operaattori numero-operaattorin avulla. (Perustelut) (3p.)

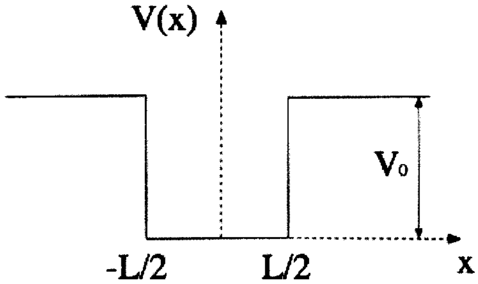
d) Mikä on harmonisen oskillaattorin perustilan aaltofunktio $\phi_0(x)$? Perustelut. Miten parametri σ liittyy siihen? (2p.)

4. a) Mitä muotoa ovat siirto-operaatorin ($\hat{D}\phi(x) = \phi(x + d)$) ominaistilat. (2 p.)

b) Oleta, että potentiaali on jaksollinen periodilla d ts. $V(x) = V(x + d)$. osoita, että siirto-operaattori kommutoi Hamiltonin operaattorin kanssa kanssa (2 p.)

c) Osoita, että kahdella kommutoivalla operaattorilla on on yhteiset ominaistilat (voit olettaa, että meillä ei ole degeneraatiota). Ts. osoita, että Blochin tilat ovat tiettyä muotoa. (2 p.)

5. Meillä on äärellisen syvyinen potentiaalikuoppa kuten kuvassa. Hiukkanen, jonka massa on m, on potentiaalin sidotussa tilassa, jonka energia on E.



a) Kirjoita oikean muotoiset ominaistilan aaltofunktiot avaruuden eri osissa. Koska potentiaali on parillinen funktio, voit olettaa ominaistilojen olevan parillisia ja parittomia. (2p.)
b) Määritä yhtälöryhmä, jonka ratkaisuna saisit edellisen kohdan tuntemattomat parametrit ratkaistua. (2p.)
c) Minkä yhtälön ratkaisuna saisit energian ominaisarvon E? (Ei tarvitse ratkaista itse yhtälöä.) (2p.)

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$