Matematiikka
Aalto-yliopisto

Hannukainen / Kuortti

MS-C1342 Lineaarialgebra

Loppukoe 14.12.2017

Ei laskimia, ei taulukoita. Koeaika on 3 tuntia.

Sinulla on kaksi vaihtoehtoa :

- Ratkaise tehtävät 1-4. Tällöin kurssin arvosana määräytyy laskuharjoitustehtävien ja kokeen arvosanan perusteella.
- Ratkaise tehtävät 1,3,5,6. Tällöin kurssin arvosana määräytyy pelkän kokeen arvosanan perusteella.

---

1. Olkoot funktio $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{3}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2.$$

   (i) Etsi matriisi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ siten, että $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}$.

   (ii) Näytä että f on sisätulo.

   (iii) Määritellään normi $\|\boldsymbol{x}\|_f^2 := f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Olkoot

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Etsi $\alpha \in \mathbb{R}$ siten että

$$\|\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{x}\|_f^2$$

   saa pienimmän arvonsa.

2. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ singulaariarvohajotelma muotoa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

   (i) Määritä ortonormaali kanta avaruuksille $R(A)$ sekä $N(A)$.

   (ii) Etsi vekorit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T.$$

   (iii) Etsi kaikki yhtälöryhmän

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   ratkaisut.

3. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ siten, että

$$A_1 = \begin{bmatrix} \pi & \alpha \\ \alpha & \sqrt{2017} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0. \end{bmatrix}$$

(i) Mitkä matriiseista A_1, A_2, A_3 ovat diagonalisoituvia ?

(ii) Kirjoita matriisi A_2 muodossa $A_2 = I + N$. Näytä, että N on nilpotentti ja todista identiteetti

$$A_2^n = I + nN.$$

Laske A_2^{2017} ja A_3^{1412}.

4. Olkoot $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ ja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Laske matriisin $R(A)$:n ortonormaali kanta käyttämällä Gram-Schmidt prosessia.

(ii) Laske ortogonaaliprojektio $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $R(A)$:lle

(iii) Tarkastellaan tehtävää : Etsi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$$

saa pienimmän pienimmän arvonsa. Näytä, että tehtävän ratkaisu $\boldsymbol{x}$ toteuttaa yhtälön $A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$, jossa P on kohdassa (ii) määritelty ortogonaaliprojektio.

5. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ singulaariarvohajotelma muotoa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(i) Määritä $R(A)$ sekä ortogonaaliprojektio (Euklidisen sisätulon mielessä) $R(A)$:lle

(ii) Olkoot $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Tarkastele PNS - tehtävää : etsi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ siten, että

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$$

saa pienimmä arvonsa. Näytä, että PNS-tehtävän ratkaisu $\boldsymbol{x}$ toteuttaa yhtälön $A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$, jossa P on ortogonaaliprojektio $R(A)$:lle.

(iii) Ratkaise PNS - tehtävä, kun $\boldsymbol{b}$ on siten, että

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} + 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

6. Olkoot $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}, M = M^T$ kääntyvä matriisi.

(i) Näytä että $\|\boldsymbol{x}\|_M := \|M\boldsymbol{x}\|_2$ on vektorinormi.

(ii) Näytä, että vektorinormin $\|\cdot\|_M$ indusoimalle matriisinormille $|||\cdot|||$ pätee

$$|||A||| := \|MAM^{-1}\|_2.$$

(iii) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Laske $|||A|||$ ja $\|A\|_2$