1. Bevisa att formeln

$$\|(x,y)\| = 2|x| + 3|y|$$

definierar en norm i planet $\mathbf{R}^2$.
b) Beräkna distansen mellan punkterna $(1,2)$ och $(3,5)$ i metriken d, som normen i del a) inducerar.

2. Låt (X,d) vara ett metriskt rum och $A, B \subset X$ icke tomma mängder.
a) Bevisa att deras diametrar satisfierar olikheten

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B),$$

om $A \cap B \neq \emptyset$. (På kursen har vi också använt beteckningen $d(A) = \operatorname{diam}(A)$ för diametern.)
b) Ge ett konkret exempel (t.ex. en figur) av en situation, där olikheten i del a) inte gäller om $A \cap B = \emptyset$.

3. Vi betraktar en delmängd $A \subset X$ i ett metriskt rum (X,d). Dess inre radie $r(A)$ definieras med formeln

$$r(A) = \sup\{r > 0 \mid \exists x \in A \text{ så att } B(x,r) \subset A\}.$$

a) Låt $A \subset X$ vara en kompakt delmängd som har inre punkter. Bevisa att $r(A)$ är ändlig och att det finns en punkt $a \in A$, som satisfierar $B(a, r(A)) \subset A$.
b) Gäller det i situationen i del a) också att $\overline{B}(a, r(A)) \subset A$?

4. I det här problemet använder vi den vanliga metriken i $\mathbf{R}$. Vi definierar $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \ x \in \mathbf{R},$$

då $n \in \mathbf{N}$. Exponentialfunktionens egenskaper antas kända.
a) Bestäm funktionföljdens (f_n) punktvisa gränsfunktion $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in \mathbf{R}.$$

b) Konvergerar följden (f_n) likformigt i mängden $\mathbf{R}$ mot funktionen f?
c) Bevisa att följden (f_n) konvergerar likformigt i intervallet $[1,2]$ mot funktionen f.

5. Låt (X,d) vara ett metriskt rum, $(E, \|.\|)$ ett normerat rum och låt $f, g \colon X \to E$ vara kontinuerliga i punkten $a \in X$. Bevisa med hjälp av $\varepsilon - \delta$-definitionen, att funktionen $f + 3g$ är kontinuerlig i punkten a.

6. a) Låt $f \colon (X,d) \to (Y,d')$ vara likformigt kontinuerlig: För varje $\varepsilon > 0$ finns det ett $\delta > 0$, så att

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \text{ då } x, y \in X \text{ och } d(x,y) < \delta.$$

Bevisa: Om (x_n) är en Cauchyföljd i X, så är $(f(x_n))$ en Cauchyföljd Y.
b) Låt (X, d_1) och (Y, d_2) vara metriska rum. Vi antar att rummet X är osammanhängande. Bevisa, att produktrummet $Z = X \times Y$ är osammanhängande. Metriken i produktrummet är t.ex.

$$d((x,y),(u,v)) = \max(d_1(x,u), d_2(y,v)), \ (x,y),(u,v) \in Z$$

som behandlades på kursen (men valet av metrik är inte en väsentlig punkt).