

T0 Kompleksianalyysi, tentti 10.12.2018

Tentissä on kolme tuntia aikaa ja neljä tehtävää, joista kustakin saa 0–6 pistettä. Tentin maksimipisteet ovat siis 24.

Kurssin aikana suoritetuista harjoitustehtävistä ja luentokohtaisista kyselyistä on mahdollista ansaita enintään 6 lisäpistettä tenttiin.

Tentissä saa käyttää A4-kokoista muistiinpanolappua. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolapun saa ottaa mukaansa tentin jälkeen.

Tehtävät

- T01** (a) Etsi yhtälön $z^3 + 1 = 0$ kaikki kompleksiset ratkaisut z . Anna jokaisesta ratkaisusta erikseen reaali- ja imaginaariosa. (3 p)
- (b) Mikä on potenssisarjan $\sum_{m=0}^{\infty} 5^m z^{3m}$ suppenemiskiekkö? (3 p)

T02 Tarkastellaan kaavan

$$u(x, y) = e^{x+y} \cos(x - y).$$

määrittelemää funktiota $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Näytä, että funktio $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on harmoninen. (3 p)
- (b) Etsi kaikki funktiot $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, joille kaavan

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

määrittelemä funktio $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen. (3 p)

T03 Laske reaalinen integraali

(6 p)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx.$$

T04 Onko olemassa funktioita, joilla on seuraavat ominaisuudet? Anna esimerkki tällaisista funktioista lyhyesti vaaditut ominaisuudet perustellen tai perustelee kurssin tuloksiin vedoten, miksi tällaisia funktioita ei voi olla olemassa.

- (a) Epätyhjässä alueessa $G \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, jolla ei ole integraalifunktiota alueessa G . (2 p)
- (b) Epätyhjässä alueessa $G \subset \mathbb{C}$ suppenevan potenssisarjan määrittelemä funktio $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, joka ei ole analyyttinen alueessa G . (2 p)
- (c) Epätyhjässä alueessa $G \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, jolla ei ole alueessa G suppenevaa potenssisarjaesitystä. (2 p)