Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Vesanen/Karjalainen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM)
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ELEC2, ENG2)
MOOC Differentiaali- ja integraalilaskenta 1

Kurssitentti ja yleinen tentti 13.12.2017 klo 9.00–12.00.

Vastauspaperit palautetaan koodeittain eri kasoihin.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Kaikki II-periodin luentokurssille (tai MOOC) osallistuneet voivat siis halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää". Tämä koskee myös I-periodin 2018 TFM-kurssin opiskelijoita.
Jos sinulla on laskaripisteitä TFM-kurssilta I/2018, niin kirjoita kohtaan Lisätietoja "+ laskaripisteet".

1. Selitä lyhyesti (ilman perusteluja) seuraavat sarjoihin liittyvät käsitteet:
   a) Geometrinen sarja, sen suppeneminen ja summa;
   b) Yli-, ali- ja harmoninen sarja sekä niiden suppeneminen;
   c) Sarjoihin liittyvä suhdetesti ja mitä sen avulla voidaan päätellä.

2. Tarkastellaan funktiota
$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}.$$
   a) Miten $f(0)$ pitää määritellä, jotta funktiosta f tulee jatkuva kohdassa $x = 0$?
   b) Millainen polynomiapproksimaatio funktiolle f saadaan, jos $\ln(1+2x)$ korvataan sen Maclaurin-polynomilla $P_4(x)$?
   Lisätieto: Maclaurin = Taylor pisteen $x_0 = 0$ suhteen.

3. a) Osoita, että funktio $f\colon [0, \pi/2[\to [0, \infty[$, $f(x) = 2x\tan x$, on aidosti kasvava. Tästä seuraa, että sillä on käänteisfunktio f^{-1}, mutta tarkempaa perustelua ei vaadita.
   b) Laske $f(\pi/4)$ ja tätä tietoa käyttämällä $(f^{-1})'(\pi/2)$.

4. a) Laske osittaisintegrointia käyttämällä integraali
$$\int_0^1 x\arctan x\,dx.$$
   b) Oletetaan tunnetuksi, että
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
   Laske sijoitusta $u = 3x$ käyttämällä integraali
$$\int_0^\infty e^{-9x^2}\,dx.$$

5. a) Eräs henkilö on opetellut ulkoa 12 000 ensimmäistä desimaalia luvusta π. Hetkellä $t = 0$ (kuukautta) kiinnostus aiheeseen lopahtaa, jolloin muistissa olevien desimaalien lukumäärä $y = y(t)$ alkaa vähentyä differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun $y(0) = 12\,000$ ja $y(12) = 4\,000$.
b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = (\cos x)/y$ alkuehdolla $y(0) = 1$.

6. Määritä differentiaaliyhtälölle $y'' + 3y' - 10y = 100$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $y'(0) = -1$.
Vihje: Yksittäisratkaisuksi käy vakiofunktio.

Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{array}\right]$$

Eräitä kaavoja ja Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$\begin{aligned}
D\tan x &= 1 + \tan^2 x \\
D\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
D\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen! (Tämä ei koske yleistä tenttiä.)

Huom. 2: MS-A0104-kurssitentin voi uusia III-periodin tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**